

10 Časový vývoj

10.1 Breit-Wignerovo rozdělení

Kvantový systém je popsán časově nezávislým Hamiltoniánem \hat{H} , takže unitární operátor časového vývoje má tvar

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \quad (10.1.1)$$

za předpokladu $\hat{U}(0) = \hat{1}$. Časově vyvinutý stav $|\psi(0)\rangle$ lze rozložit jako

$$|\psi(t)\rangle = A(t)|\psi(0)\rangle + |\phi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle, \quad (10.1.2)$$

kde

$$A(t) \equiv \langle\psi(0)|\psi(t)\rangle \quad (10.1.3)$$

a stav $|\psi(0)\rangle$ je kolmý na stav $|\phi(t)\rangle$,

$$\langle\psi(0)|\phi(t)\rangle = 0. \quad (10.1.4)$$

Na stav $|\psi(t)\rangle$ lze pohlížet například jako na superpozici rozpadlého a nerozpadlého jádra, přičemž $A(t)$ udává amplitudu pravděpodobnosti, že se systém od času 0 do času t nerozpadne (amplituda přežití).

1. Užitím rozkladu operátoru identity

$$\hat{1} = \int_{-\infty}^{\infty} |E\rangle \langle E| dE \quad (10.1.5)$$

ověřte, že amplituda $A(t)$ se dá vyjádřit jako Fourierova transformace hustoty pravděpodobnosti $f(\omega)$ v energetické reprezentaci

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (10.1.6)$$

kde

$$f(\omega) = \frac{1}{\hbar} \left| \langle E|\psi(0)\rangle \right|^2 \Big|_{E=\hbar\omega} \quad (10.1.7)$$

Nechť

$$P(t) \equiv |A(t)|^2 = e^{-\frac{\Gamma}{\hbar}t}, \quad t \geq 0, \quad \Gamma > 0 \quad (10.1.8)$$

je pravděpodobnost exponenciálního rozpadového zákona (pravděpodobnost, že se systém rozpadne v čase $t \geq 0$), přičemž střední doba života je $\tau \equiv \hbar/\Gamma$. Amplituda pravděpodobnosti se vyjádří jako

$$A(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2\hbar}t} e^{i\omega_0 t}, \quad t \geq 0 \quad (10.1.9)$$

kde $e^{i\omega_0 t}$ udává komplexní fázi.

2. Nalezněte vyjádření pro $A(-t)$.

3. Ukažte, že

$$\frac{d}{dt} P(t) \Big|_{t=0} = 0. \quad (10.1.10)$$

4. Inverzní Fourierovou transformací spočítejte $f(\omega)$ z $A(t)$. Získáte *Breit-Wignerovo (Cauchyho) rozdělení*

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + \hbar^2(\omega - \omega_0)^2}. \quad (10.1.11)$$

5. Dokažte, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega = 1, \quad (10.1.12)$$

takže veličinu $f(\omega)$ lze považovat za hustotu pravděpodobnosti (nalezení částice s frekvencí ω).

6. Vypočítejte střední hodnotu energie a disperzi

$$\langle E \rangle = \hbar \langle \omega \rangle = \hbar \int_{-\infty}^{\infty} \omega f(\omega) d\omega \quad (10.1.13a)$$

$$(\Delta E)^2 = \hbar^2 \left(\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 \right) = \hbar^2 \langle E^2 \rangle - \hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 f(\omega) d\omega. \quad (10.1.13b)$$

7. Ukažte, že šířka křivky rozdělení $f(\omega)$ v polovině výšky je rovna Γ .

Řešení:

1. Do rovnice (10.1.3) se dosadí relace uzavřenosti (10.1.7):

$$\begin{aligned} A(t) &= \langle \psi(0) | \psi(t) \rangle \\ &= \left\langle \psi(0) \left| e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \right| \psi(0) \right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dE' \langle \psi(0) | E \rangle \underbrace{\left\langle E \left| e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \right| E' \right\rangle}_{e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \delta(E-E')} \langle E' | \psi(0) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dE |\langle E | \psi(0) \rangle|^2 e^{-\frac{i}{\hbar} E t} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\hbar} |\langle E | \psi(0) \rangle|^2 e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (10.1.14)$$

což je dokazovaný výraz (10.1.6).

2. Obecně platí

$$\begin{aligned} A(-t) &= \left\langle \psi(0) \left| e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \right| \psi(0) \right\rangle \\ &= \left\langle \psi(0) \left| -e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \right| \psi(0) \right\rangle^* \\ &= A^*(t), \end{aligned} \quad (10.1.15)$$

takže speciálně pro amplitudu (10.1.9) exponenciálního rozpadového zákona vychází

$$A(t) = A^*(-t) = e^{\frac{\Gamma}{2\hbar} t} e^{i\omega_0 t}, \quad t < 0. \quad (10.1.16)$$

3. Jelikož $P(t) = A^*(t)A(t)$, pak výsledek předchozího bodu (10.1.16) vede na

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{dA^*(t)}{dt} A(t) + A^*(t) \frac{dA(t)}{dt} = -A'(-t)A(t) + A'(t)A(-t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0. \quad (10.1.17)$$

Z toho vyplývá, že kvantový rozpad musí být pro malé časy vždy alespoň kvadratická funkce času t . Exponenciální rozpadový zákon toto *nesplňuje*.

4. Inverzní Fourierova transformace k transformaci (10.1.6) je

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{i\omega t} dt, \quad (10.1.18)$$

kde integrace $x \in (-\infty, 0)$ se dá provést díky rozšíření (10.1.16):

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{[\frac{\Gamma}{2\hbar} + i(\omega - \omega_0)]t} dt + \int_0^{\infty} e^{[-\frac{\Gamma}{2\hbar} + i(\omega - \omega_0)]t} dt \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\frac{\Gamma}{2\hbar} + i(\omega - \omega_0)} - \frac{1}{-\frac{\Gamma}{2\hbar} + i(\omega - \omega_0)} \right] \\ &= \frac{\hbar}{\pi} \frac{\frac{\Gamma}{2}}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + \hbar^2 (\omega - \omega_0)^2}. \end{aligned} \quad (10.1.19)$$

5. Normalizace

$$\begin{aligned} I_0 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega = \frac{\hbar}{\pi} \frac{\Gamma}{2} \left(\frac{2}{\Gamma}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{1 + \left(\frac{2\hbar}{\Gamma}\right)^2 (\omega - \omega_0)^2} = \left| \begin{array}{l} x = \frac{2\hbar}{\Gamma} (\omega - \omega_0) \\ d\omega = \frac{\Gamma}{2\hbar} dx \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} \\ &= \frac{1}{\pi} [\arctan x]_{-\infty}^{\infty} = 1. \end{aligned} \quad (10.1.20)$$

6. Střední hodnota²³

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \omega f(\omega) d\omega = \frac{\hbar}{\pi} \frac{\Gamma}{2} \left(\frac{2}{\Gamma}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega - \omega_0 + \omega_0) d\omega}{1 + \left(\frac{2\hbar}{\Gamma}\right)^2 (\omega - \omega_0)^2} = \left| \begin{array}{l} y = \omega - \omega_0 \\ d\omega = dy \end{array} \right| \\ &= \omega_0 I_0 + \underbrace{\frac{2}{\pi \hbar \Gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y dy}{1 + \left(\frac{2\hbar}{\Gamma}\right)^2 y^2}}_0 \\ &= \omega_0. \end{aligned} \quad (10.1.21)$$

Střední hodnota ω^2

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 f(\omega) d\omega = \frac{\Gamma}{2\pi\hbar} \left(\frac{2}{\Gamma}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega^2 - 2\omega\omega_0 + \omega_0^2 + 2\omega\omega_0 - \omega_0^2) d\omega}{1 + \left(\frac{2\hbar}{\Gamma}\right)^2 (\omega - \omega_0)^2} \\ &= 2\omega_0 I_1 - \omega_0^2 I_0 + \frac{2}{\pi \hbar \Gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2 dy}{1 + \left(\frac{2\hbar}{\Gamma}\right)^2 y^2} = \left| \begin{array}{l} z = \frac{2\hbar}{\Gamma} y \\ dy = \frac{\Gamma}{2\hbar} dz \end{array} \right| \\ &= \omega_0^2 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2 dz}{1 + z^2} \\ &= \omega_0^2 + \frac{1}{\pi} [x - \arctan x]_{-\infty}^{\infty}, \end{aligned} \quad (10.1.22)$$

takže

$$(\Delta\omega)^2 = [x - \arctan x]_{-\infty}^{\infty} \rightarrow \infty. \quad (10.1.23)$$

Breit-Wignerovo rozdělení má tedy nekonečnou disperzi.

Poznámka: Lineární chování exponenciálního rozpadového zákona v $t = 0$ a nekonečná disperze Breit-Wignerova rozdělení spolu souvisejí. Breit-Wignerovo rozdělení nemůže být fyzikální, jelikož není omezené na energiích zespu.

Poznámka: (Payleyův-Wienerův teorém) Je-li Hamiltonián systému omezený odspodu, tj. existuje-li E_0 taková, že

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \geq E_0 \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}, \quad (10.1.24)$$

²³Poslední integrál při výpočtu střední hodnoty je lichá funkce, odpovídající primitivní funkce je tedy sudá. Primitivní funkce však diverguje pro $y \rightarrow \infty$. Integrál přes nekonečný interval je tedy nutno chápat tak, že interval je symetrický, tj. ve smyslu limity $\lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z}^z$, ve které integrál vymizí.

a je-li $|A(t)|$ kvadraticky integrovatelná funkce, pak zároveň platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |A(t)||}{1+t^2} dt < \infty. \quad (10.1.25)$$

Tato podmínka je rovněž vhodným kritériem pro to, jestli $A(t)$ je dobrá funkce pro konsistentní teorii kvantového rozpadu.

Breit-Wignerovo rozdělení tuto podmínku nespĺňuje:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma}{2\hbar} \frac{|t|}{1+t^2} dt = \frac{\Gamma}{\hbar} \int_0^{\infty} \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{\Gamma}{2\hbar} \left[\ln(1+t^2) \right]_0^{\infty} \rightarrow \infty. \quad (10.1.26)$$

10.2 Ramseyův přístroj

Částice se spinem $1/2$ a velikostí magnetického momentu μ , popsaná vlnovou funkcí (spinorem)

$$|\psi\rangle(t) = \psi_{\uparrow}(t) |\uparrow\rangle + \psi_{\downarrow}(t) |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(t) \\ \psi_{\downarrow}(t) \end{pmatrix}, \quad (10.2.1)$$

se pohybuje v zařízení složeném ze tří oblastí. V první oblasti (1. Ramseyova oblast) je zapnuté magnetické pole složené ze stacionární složky \mathbf{B}_0 směřující podél osy z a rotující složky $\mathbf{B}_1(t)$ v rovině (x, y)

$$\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0), \quad (10.2.2a)$$

$$\mathbf{B}_1(t) = (B_1 \cos \omega t, -B_1 \sin \omega t, 0), \quad (10.2.2b)$$

a částice v ní stráví dobu τ . V druhé oblasti je rotující pole vypnuto a po dobu T se částice pohybuje pouze ve stacionárním poli \mathbf{B}_0 . Poté (2. Ramseyova oblast) je rotující pole zapnuto, a to opět na dobu τ ²⁴.

1. Napište Hamiltonián v Ramseyově oblasti.
2. Nalezněte složky evolučního operátoru [12]

$$\mathbf{U}(t) = e^{i\frac{\omega t}{2} \sigma_3} e^{-i\frac{\Omega t}{2} (\hat{\mathbf{n}}_{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma})} \quad (10.2.3)$$

kde

$$\Omega = \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2}, \quad \hat{\mathbf{n}}_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \begin{pmatrix} -\omega_1 \\ 0 \\ \omega - \omega_0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{0,1} = \frac{2\mu}{\hbar} B_{0,1}. \quad (10.2.4)$$

3. Nalezněte složky evolučního operátoru $\mathbf{U}(t; t_0)$, který vyvíjí systém z času t_0 do času t .
4. Nalezněte složky evolučního operátoru $\mathbf{U}_0(\tau + T; \tau)$ oblasti, kde je vypnuté pole \mathbf{B}_1 .
5. Proces průchodu zařízením složeným z dvou Ramseyových oblastí s mezioblastí s vypnutým polem \mathbf{B}_1 je dán evolučním operátorem

$$\mathbf{U}_F = \mathbf{U}(2\tau + T; \tau + T) \mathbf{U}_0(\tau + T; \tau) \mathbf{U}(\tau; 0). \quad (10.2.5)$$

Nalezněte amplitudu pravděpodobnosti $A_{\downarrow\uparrow}$ a pravděpodobnost $p_{\downarrow\uparrow}$, že systém připravený na počátku ve stavu, kdy projekce spinu na osu z je $+1/2$,

$$|\psi_i\rangle = |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (10.2.6)$$

bude po průchodu zařízením ve stavu, kdy projekce spinu bude $-1/2$ (dojde k překlopení spinu²⁵):

$$|\psi_f\rangle = |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10.2.7)$$

²⁴Experiment navrhl v 50. letech 20. století Norman Foster Ramsley a v roce 1989 za něj dostal Nobelovu cenu.

²⁵Spin flip.

6. Nalezněte amplitudu pravděpodobnosti $A_{\downarrow\uparrow}^{(1)}$ ($A_{\uparrow\uparrow}^{(1)}$), že k přehození spinu dojde (nedojde) po průchodu 1. Ramseyovou oblastí a oblastí bez oscilujícího pole.
7. Nalezněte amplitudu pravděpodobnosti $A_{\downarrow\uparrow}^{(2)}$ ($A_{\uparrow\downarrow}^{(2)}$), že k přehození spinu dojde (nedojde) po průchodu 2. Ramseyovou oblastí.
8. Ověřte, že složením amplitud pravděpodobnosti z předchozích dvou bodů dostanete amplitudu pravděpodobnosti A_{12} . Ukažte, že pravděpodobnost obsahuje interferenční člen.
9. V rezonančním případě, kdy je úhlová frekvence oscilujícího pole ω stejná jako Larmorova frekvence ω_0 , najděte matici pravděpodobností přechodu p^{rez} , jejíž složky p_{fi}^{rez} udávají pravděpodobnosti, že spin, který vletá do zařízení s polarizací $i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ vylétne s polarizací $f \in \{\uparrow, \downarrow\}$.

Poznámka: Příklad je přejat z monografie [11], kapitola 8.8.

Řešení:

1. Pauliho matice σ jsou dány vztahy (2.0.1). Matice Hamiltoniánu v Ramseyově oblasti je

$$\begin{aligned} H &= -\mu \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}(t) \\ &= -\mu \begin{pmatrix} B_0 & B_1(\cos \omega t + i \sin \omega t) \\ B_1(\cos \omega t - i \sin \omega t) & -B_0 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \frac{\hbar\omega_0}{2} & \frac{\hbar\omega_1}{2} e^{i\omega t} \\ \frac{\hbar\omega_1}{2} e^{-i\omega t} & -\frac{\hbar\omega_0}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.2.8)$$

2. Evoluční operátor (10.2.3) se vypočítá pomocí vztahu (2.2.1)²⁶. Jeho použití vede na²⁷

$$e^{i\frac{\omega t}{2}\sigma_3} = \cos \frac{\omega t}{2} + i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sin \frac{\omega t}{2} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega t}{2}} \end{pmatrix}, \quad (10.2.9a)$$

$$\begin{aligned} e^{-i\frac{\Omega t}{2}(\hat{\mathbf{n}}_{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma})} &= \cos \frac{\Omega t}{2} - i(\hat{\mathbf{n}}_{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin \frac{\Omega t}{2} \\ &= \cos \frac{\Omega t}{2} - \frac{i}{\Omega} \begin{pmatrix} \omega - \omega_0 & -\omega_1 \\ -\omega_1 & -(\omega - \omega_0) \end{pmatrix} \sin \frac{\Omega t}{2} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\Omega t}{2} - \frac{i}{\Omega}(\omega - \omega_0) \sin \frac{\Omega t}{2} & \frac{i\omega_1}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \\ \frac{i\omega_1}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} & \cos \frac{\Omega t}{2} + \frac{i}{\Omega}(\omega - \omega_0) \sin \frac{\Omega t}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.2.9b)$$

a vynásobení těchto dvou matic dává

$$U(t) = \begin{pmatrix} \left[\cos \frac{\Omega t}{2} - \frac{i\Delta\omega}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \right] e^{i\frac{\omega t}{2}} & \frac{i\omega_1}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} e^{i\frac{\omega t}{2}} \\ \frac{i\omega_1}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} e^{-i\frac{\omega t}{2}} & \left[\cos \frac{\Omega t}{2} + \frac{i\Delta\omega}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \right] e^{-i\frac{\omega t}{2}} \end{pmatrix}, \quad (10.2.10)$$

kde $\Delta\omega \equiv \omega - \omega_0$.

3. Evoluční operátor (10.2.10) vyvíjí systém z času $t_0 = 0$ do času t , jedná se tedy formálně o operátor $U(t; 0)$. Operátor $U(t; t_0)$ je díky unitaritě evolučního operátoru a díky Stoneově teorému

$$U(t; t_0) = U(t; 0)U(0; t_0) = U(t; 0)U^{-1}(t_0; 0) = U(t; 0)U^\dagger(t_0; 0). \quad (10.2.11)$$

Výsledek lze získat buď přímým pronásobením odpovídajících matic (10.2.10), nebo z definičního vztahu (10.2.3)

$$\begin{aligned} U(t; t_0) &= e^{i\frac{\omega t}{2}\sigma_3} e^{-i\frac{\Omega t}{2}(\hat{\mathbf{n}}_{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma})} e^{i\frac{\Omega t_0}{2}(\hat{\mathbf{n}}_{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma})} e^{-i\frac{\omega t_0}{2}\sigma_3} \\ &= e^{i\frac{\omega t}{2}\sigma_3} e^{-i\frac{\Omega(t-t_0)}{2}(\hat{\mathbf{n}}_{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma})} e^{-i\frac{\omega t_0}{2}\sigma_3}, \end{aligned} \quad (10.2.12)$$

²⁶Vztah (2.2.1) je možné použít jen v případě, že $|\hat{\mathbf{n}}| = 1$. To je zaručeno normalizačním faktorem $\frac{1}{\Omega}$ ve vyjádření vektoru $\hat{\mathbf{n}}$ v (10.2.4).

²⁷První vztah lze určit i přímo díky tomu, že matice σ_3 je diagonální.

což po dosazení matic (10.2.9a) a (10.2.9b) vede na

$$U_{11}(t; t_0) = \left[\cos \frac{\Omega(t-t_0)}{2} - i \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \frac{\Omega(t-t_0)}{2} \right] e^{i\frac{\omega(t-t_0)}{2}}, \quad (10.2.13a)$$

$$U_{12}(t; t_0) = -U_{21}^*(t; t_0) = i \frac{\omega_1}{\Omega} \sin \frac{\Omega(t-t_0)}{2} e^{i\frac{\omega(t+t_0)}{2}}, \quad (10.2.13b)$$

$$U_{22}(t; t_0) = \left[\cos \frac{\Omega(t-t_0)}{2} + i \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \frac{\Omega(t-t_0)}{2} \right] e^{-i\frac{\omega(t-t_0)}{2}} \quad (10.2.13c)$$

(v exponenciálách mimodiagonálních prvků je součet časů $t + t_0$).

4. Evoluční operátor v oblasti vypnutého pole \mathbf{B}_1 lze získat například přímým výpočtem z (10.2.13). V této oblasti je $\omega_1 = 0$, takže $\Omega = \omega - \omega_0 = \Delta\omega$ a

$$U_0(\tau + T; \tau) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\Delta\omega T}{2}} e^{i\frac{\omega T}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Delta\omega T}{2}} e^{-i\frac{\omega T}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega_0 T}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega_0 T}{2}} \end{pmatrix}. \quad (10.2.14)$$

Jelikož v této oblasti Hamiltonián nezávisí na čase, tak evoluční operátor závisí jen na rozdílu počátečního a koncového času.

5. Cílem je najít amplitudu pravděpodobnosti

$$A_{\downarrow\uparrow} = \langle \psi_f | \hat{U}_F | \psi_i \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}_F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.2.15)$$

Výpočet se rozdělí na dvě části:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0(\tau + T; \tau) \mathbf{U}(\tau; 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega_0 T}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega_0 T}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\cos \frac{\Omega\tau}{2} - i \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} \right) e^{i\frac{\omega\tau}{2}} \\ i \frac{\omega_1}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} e^{-i\frac{\omega\tau}{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\cos \frac{\Omega\tau}{2} - i \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} \right) e^{i\frac{\omega\tau}{2}} e^{i\frac{\omega_0 T}{2}} \\ i \frac{\omega_1}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} e^{-i\frac{\omega\tau}{2}} e^{-i\frac{\omega_0 T}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.2.16)$$

a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}(2\tau + T; \tau + T) = \begin{pmatrix} i \frac{\omega_1}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} e^{-i\frac{\omega(3\tau+2T)}{2}} \\ \left(\cos \frac{\Omega\tau}{2} + i \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} \right) e^{-i\frac{\omega\tau}{2}} \end{pmatrix}. \quad (10.2.17)$$

Vzájemné vynásobení těchto dvou výrazů vede na hledaný výsledek

$$\begin{aligned} A_{\downarrow\uparrow} &= i \frac{\omega_1}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} e^{-i\omega\tau} e^{-i\frac{\omega T}{2}} \\ &* \left[\left(\cos \frac{\Omega\tau}{2} - i \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} \right) e^{-i\frac{\Delta\omega T}{2}} + \left(\cos \frac{\Omega\tau}{2} + i \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} \right) e^{i\frac{\Delta\omega T}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (10.2.18)$$

Pravděpodobnost přehození spinu je tedy (v průběhu výpočtu je pro zjednodušení použito značení $s \equiv \sin \frac{\Omega\tau}{2}$, $c \equiv \cos \frac{\Omega\tau}{2}$, $f \equiv \frac{\Delta\omega T}{2}$)

$$\begin{aligned} P_{\downarrow\uparrow} &= A_{\downarrow\uparrow}^* A_{\downarrow\uparrow} \\ &= \left(\frac{\omega_1}{\Omega} \right)^2 s^2 \left[\left(c - i \frac{\Delta\omega}{\Omega} s \right) e^{-if} + \left(c + i \frac{\Delta\omega}{\Omega} s \right) e^{if} \right]^2 \\ &= \left(\frac{\omega_1}{\Omega} \right)^2 s^2 \left[\left(c^2 - \frac{2i\Delta\omega}{\Omega} cs - \frac{\Delta\omega^2}{\Omega^2} \right) e^{-2if} + \left(c^2 + \frac{2i\Delta\omega}{\Omega} cs - \frac{\Delta\omega^2}{\Omega^2} \right) e^{2if} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(c^2 + \frac{\Delta\omega^2}{\Omega^2} s^2 \right) \right] \\ &= \left(\frac{\omega_1}{\Omega} \right)^2 s^2 \left[c^2 (e^{2if} + e^{-2if} + 2) - \frac{\Delta\omega^2}{\Omega^2} s^2 (e^{2if} + e^{-2if} - 2) + \frac{2i\Delta\omega}{\Omega} cs (e^{2if} + e^{-2if}) \right] \\ &= \left(\frac{\omega_1}{\Omega} \right)^2 s^2 \left[c^2 (2 + 2 \cos 2f) + \frac{\Delta\omega^2}{\Omega^2} s^2 (2 - 2 \cos 2f) - \frac{4\Delta\omega}{\Omega} cs \sin 2f \right] \\ &= \left(\frac{\omega_1}{\Omega} \right)^2 s^2 \left(4c^2 \cos^2 f + 4 \frac{\Delta\omega^2}{\Omega^2} s^2 \sin^2 f - \frac{8\Delta\omega}{\Omega} cs \cos f \sin f \right) \\ &= 4 \left(\frac{\omega_1}{\Omega} \right)^2 \sin^2 \frac{\Omega\tau}{2} \left(\cos \frac{\Omega\tau}{2} \cos \frac{\Delta\omega T}{2} - \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} \sin \frac{\Delta\omega T}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (10.2.19)$$

6. K výpočtu amplitud $A_{\downarrow\uparrow}^{(1)}$ a $A_{\uparrow\uparrow}^{(1)}$ se využije mezivýsledku (10.2.16):

$$A_{\downarrow\uparrow}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} U_0(\tau + T; \tau) U(\tau; 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i \frac{\omega_1}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} e^{-i\frac{\omega\tau}{2}} e^{-i\frac{\omega_0 T}{2}}, \quad (10.2.20a)$$

$$A_{\uparrow\uparrow}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} U_0(\tau + T; \tau) U(\tau; 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\cos \frac{\Omega\tau}{2} - i \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} \right) e^{i\frac{\omega\tau}{2}} e^{i\frac{\omega_0 T}{2}}. \quad (10.2.20b)$$

7. K výpočtu amplitud $A_{\downarrow\downarrow}^{(2)}$ a $A_{\uparrow\downarrow}^{(2)}$ se využije mezivýsledku (10.2.17):

$$A_{\downarrow\downarrow}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} U(2\tau + T; \tau + T)(\tau; 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i \frac{\omega_1}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} e^{-i\frac{\omega(3\tau+2T)}{2}}, \quad (10.2.21a)$$

$$A_{\uparrow\downarrow}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} U(2\tau + T; \tau + T)(\tau; 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\cos \frac{\Omega\tau}{2} + i \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \frac{\Omega\tau}{2} \right) e^{-i\frac{\omega\tau}{2}}. \quad (10.2.21b)$$

8. Přímé dosazení předchozích výsledků dává

$$A_{\downarrow\uparrow} = \underbrace{A_{\downarrow\uparrow}^{(2)} A_{\uparrow\uparrow}^{(1)}}_{A_{\downarrow\uparrow}} + \underbrace{A_{\downarrow\downarrow}^{(2)} A_{\downarrow\uparrow}^{(1)}}_{A_{\downarrow\uparrow}}. \quad (10.2.22)$$

Pravděpodobnost přehození spinu tedy je

$$p_{\downarrow\uparrow} = |A_{\downarrow\uparrow}|^2 = |A_{\downarrow\uparrow}^{(2)} A_{\uparrow\uparrow}^{(1)} + A_{\downarrow\downarrow}^{(2)} A_{\downarrow\uparrow}^{(1)}|^2 = |A_{\downarrow\uparrow}^{(2)} A_{\uparrow\uparrow}^{(1)}|^2 + |A_{\downarrow\downarrow}^{(2)} A_{\downarrow\uparrow}^{(1)}|^2 + \underbrace{2 \operatorname{Re} \left(A_{\downarrow\uparrow}^{(2)*} A_{\downarrow\downarrow}^{(2)} A_{\uparrow\uparrow}^{(1)} A_{\downarrow\uparrow}^{(1)*} \right)}_{\text{interferenční člen}}. \quad (10.2.23)$$

9. V rezonančním případě je podle (10.2.4) $\Omega = \omega_1$ a $\Delta\omega = 0$, takže

$$p_{\downarrow\uparrow}^{\text{rez}} = 4 \sin^2 \frac{\omega_1 \tau}{2} \cos^2 \frac{\omega_1 \tau}{2} = \sin^2 \omega_1 \tau. \quad (10.2.24)$$

K výpočtu ostatních pravděpodobností se využije vlastností

$$\begin{aligned} p_{\downarrow\downarrow} + p_{\downarrow\uparrow} &= 1 = p_{\uparrow\downarrow} + p_{\uparrow\uparrow} = 1 \\ p_{\downarrow\uparrow} &= p_{\uparrow\downarrow} \end{aligned} \quad (10.2.25)$$

(první vztah vyplývá z toho, že spin musí projít v jednom ze dvou možných ortogonálních stavů, druhý vztah plyne ze symetrie systému). Všechny hledané pravděpodobnosti lze zapsat ve tvaru matice

$$\mathbf{p}^{\text{rez}} = \begin{pmatrix} \cos^2 \omega_1 \tau & \sin^2 \omega_1 \tau \\ \sin^2 \omega_1 \tau & \cos^2 \omega_1 \tau \end{pmatrix}. \quad (10.2.26)$$

Speciální případy:

$$\begin{aligned} \omega_1 \tau &= k\pi & \mathbf{p}^{\text{rez}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{– spin projde bez překlopení} \\ \omega_1 \tau &= \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi & \mathbf{p}^{\text{rez}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{– 100\% pravděpodobnost překlopení spinu} \\ \omega_1 \tau &= \frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi & \mathbf{p}^{\text{rez}} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \end{aligned} \quad (10.2.27)$$

přičemž $k \in \mathbb{Z}$.

10.3 Ramseyův přístroj pro spin 1

Částice se spinem 1 a velikostí magnetického momentu μ , popsaná vlnovou funkcí

$$|\psi(t)\rangle = \psi_{+1}(t) | +1 \rangle + \psi_0(t) | 0 \rangle + \psi_{-1}(t) | -1 \rangle = \begin{pmatrix} \psi_{+1}(t) \\ \psi_0(t) \\ \psi_{-1}(t) \end{pmatrix}, \quad (10.3.1)$$

kde dolní index určuje projekci spinu na osu z , se pohybuje v zařízení složeném ze tří oblastí. V první oblasti (1. Ramseyova oblast) je zapnuté magnetické pole složené ze stacionární složky \mathbf{B}_0 směřující podél osy z a rotující složky $\mathbf{B}_1(t)$ v rovině (x, y) ,

$$\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0), \quad \mathbf{B}_1(t) = (B_1 \cos \omega t, -B_1 \sin \omega t, 0), \quad (10.3.2)$$

a částice v ní stráví dobu τ . V druhé oblasti je rotující pole vypnuto a po dobu T se částice pohybuje pouze ve stacionárním poli \mathbf{B}_0 . Poté (2. Ramseyova oblast) je rotující pole zapnuto, a to opět na dobu τ .

1. Matice generující rotace částice se spinem 1 jsou $\mathbf{S}_j^{(1)} = \hbar \mathbf{s}_j$, kde

$$\mathbf{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10.3.3)$$

Ukažte, že tyto matice splňují komutační relace pro moment hybnosti

$$[\mathbf{s}_j, \mathbf{s}_k] = i \epsilon_{jkl} \mathbf{s}_l. \quad (10.3.4)$$

(Matice \mathbf{s}_j jsou analogické k Pauliho maticím σ_j popisujícím částici se spinem 1/2 a tvoří generátory jednorozměrné ireducibilní reprezentace grupy $SO(3)$.)

2. Dokažte, že pro matice \mathbf{s}_j platí $\mathbf{s}_j^{n+2} = \mathbf{s}_j^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, a na základě tohoto vztahu vyjádřete exponenciálu

$$e^{i\phi(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s})} = ? \quad (10.3.5)$$

kde $\hat{\mathbf{n}}$ je jednotkový vektor určující osu rotace, okolo které se systém otočí o úhel ϕ , a

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s} \equiv \hat{n}_1 \mathbf{s}_1 + \hat{n}_2 \mathbf{s}_2 + \hat{n}_3 \mathbf{s}_3. \quad (10.3.6)$$

3. Vyjádřete složky evolučního operátoru

$$\mathbf{U}(t) = e^{i\omega t \mathbf{s}_3} e^{-i\Omega t (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s})}, \quad (10.3.7)$$

kde

$$\Omega = \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2}, \quad \hat{\mathbf{n}}_\Omega = \frac{1}{\Omega} \begin{pmatrix} -\omega_1 \\ 0 \\ \omega - \omega_0 \end{pmatrix}, \quad \omega_{0,1} = \frac{2\mu}{\hbar} B_{0,1}. \quad (10.3.8)$$

4. Vyjádřete složky evolučního operátoru $\mathbf{U}(t; t_0)$, který vyvíjí systém z času t_0 do času t .
5. Vyjádřete složky evolučního operátoru $\mathbf{U}_0(\tau + T; \tau)$ oblasti, kde je vypnuté pole \mathbf{B}_1 .
6. Proces průchodu zařízením složeným z dvou Ramseyových oblastí s mezioblastí s vypnutým polem \mathbf{B}_1 je dán evolučním operátorem

$$\mathbf{U}_F = \mathbf{U}(2\tau + T; \tau + T) \mathbf{U}_0(\tau + T; \tau) \mathbf{U}(\tau; 0). \quad (10.3.9)$$

Vyjádřete složky evolučního operátoru $\mathbf{U}_F^{\text{rez}}$ pro speciální případ $\omega = \omega_0$ (frekvence oscilujícího magnetického pole \mathbf{B}_1 je v rezonanci s Larmorovou frekvencí ω_0).

7. Vypočítejte matici \mathbf{P}^{rez} se složkami P_{fi}^{rez} , které udávají pravděpodobnosti, že systém připravený na před vstupem do přístroje ve stavu s projekcí spinu na osu z rovnou $i \in \{+1, 0, -1\}$, naměříme po průchodu zařízením ve stavu s projekcí spinu $f \in \{+1, 0, -1\}$.

Řešení:

- Důkaz se provede prostým dosazením.
- Vztah $s_j^{n+2} = s_j^n$ se dokáže dosazením. Pro mocniny matice $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s}$ platí

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s} = \begin{pmatrix} n_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1 - in_2) & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1 + in_2) & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1 - in_2) \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1 + in_2) & -n_3 \end{pmatrix}, \quad (10.3.10a)$$

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s})^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(n_1^2 + n_2^2) + n_3^2 & \frac{n_3}{\sqrt{2}}(n_1 - in_2) & \frac{1}{2}(n_1^2 - n_2^2 - 2in_1n_2) \\ \frac{n_3}{\sqrt{2}}(n_1 + in_2) & n_1^2 + n_2^2 & -\frac{n_3}{\sqrt{2}}(n_1 - in_2) \\ \frac{1}{2}(n_1^2 - n_2^2 + 2in_1n_2) & -\frac{n_3}{\sqrt{2}}(n_1 + in_2) & \frac{1}{2}(n_1^2 + n_2^2) + n_3^2 \end{pmatrix}, \quad (10.3.10b)$$

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s})^3 = \begin{pmatrix} n_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1 - in_2) & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1 + in_2) & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1 - in_2) \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1 + in_2) & -n_3 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s}, \quad (10.3.10c)$$

a tedy

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s})^{2j+1} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s}, \quad (10.3.11a)$$

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s})^{2j} = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s})^2, \quad (10.3.11b)$$

kde $j \in \mathbb{N}$. Rozvinutí exponenciály do řady pak vede po úpravách na hledaný výsledek²⁸

$$\begin{aligned} e^{i\phi(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s})} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^j}{j!} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s})^j \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^{2j+1}}{(2j+1)!} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s})^{2j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(i\phi)^{2j}}{(2j)!} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s})^{2j} \\ &= 1 + i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \phi^{2j+1}}{(2j+1)!} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s}) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j \phi^{2j}}{(2j)!} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s})^2 \\ &= 1 + i (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s}) \sin \phi + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{s})^2 (\cos \phi - 1). \end{aligned} \quad (10.3.12)$$

- Složky evolučního operátoru $U(t)$ se dostanou ze vzorce (10.3.13) dosazením $t_0 = 0$.
- Postup je zcela stejný jako v příkladu 10.2. Vychází se ze vztahu (10.3.5), což vede na

$$U_{11}(t; t_0) = \left[1 - i \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega(t - t_0) - \left(\frac{2\Delta\omega^2}{\Omega^2} + \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \right) \sin^2 \frac{\Omega(t - t_0)}{2} \right] e^{i\omega(t-t_0)}, \quad (10.3.13a)$$

$$U_{12}(t; t_0) = \frac{\omega_1}{\sqrt{2}\Omega} \left[i \sin \Omega(t - t_0) + \frac{2\Delta\omega}{\Omega} \sin^2 \frac{\Omega(t - t_0)}{2} \right] e^{i\omega t}, \quad (10.3.13b)$$

$$U_{13}(t; t_0) = -\frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega(t - t_0)}{2} e^{i\omega(t+t_0)}, \quad (10.3.13c)$$

$$U_{21}(t; t_0) = \frac{\omega_1}{\sqrt{2}\Omega} \left[i \sin \Omega(t - t_0) + \frac{2\Delta\omega}{\Omega} \sin^2 \frac{\Omega(t - t_0)}{2} \right] e^{-i\omega t_0}, \quad (10.3.13d)$$

$$U_{22}(t; t_0) = 1 - \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega(t - t_0)}{2}, \quad (10.3.13e)$$

$$U_{23}(t; t_0) = \frac{\omega_1}{\sqrt{2}\Omega} \left[i \sin \Omega(t - t_0) - \frac{2\Delta\omega}{\Omega} \sin^2 \frac{\Omega(t - t_0)}{2} \right] e^{i\omega t_0}, \quad (10.3.13f)$$

$$U_{31}(t; t_0) = -\frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega(t - t_0)}{2} e^{-i\omega(t+t_0)}, \quad (10.3.13g)$$

$$U_{32}(t; t_0) = \frac{\omega_1}{\sqrt{2}\Omega} \left[i \sin \Omega(t - t_0) - \frac{2\Delta\omega}{\Omega} \sin^2 \frac{\Omega(t - t_0)}{2} \right] e^{-i\omega t}, \quad (10.3.13h)$$

$$U_{33}(t; t_0) = \left[1 + i \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega(t - t_0) - \left(\frac{2\Delta\omega^2}{\Omega^2} + \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \right) \sin^2 \frac{\Omega(t - t_0)}{2} \right] e^{-i\omega(t-t_0)}, \quad (10.3.13i)$$

²⁸Viz též příklady 9.3 a 9.28 ve sbírce [2].

5. Dosazení $\omega_1 = 0$ do (10.3.13) dává

$$U_0(\tau + T; \tau) = \begin{pmatrix} e^{i\omega_0 T} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\omega_0 T} \end{pmatrix} \quad (10.3.14)$$

6. V rezonančním případě $\omega = \omega_0$ je $\Delta\omega = 0$ a $\Omega = \omega_1$, čímž se (10.3.13) zjednoduší na

$$U^{\text{rez}}(t; t_0) = \begin{pmatrix} e^{i\omega(t-t_0)} \cos^2 \frac{\omega_1(t-t_0)}{2} & \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} \sin \omega_1(t-t_0) & -e^{i\omega(t+t_0)} \sin^2 \frac{\omega_1(t-t_0)}{2} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t_0} \sin \omega_1(t-t_0) & \cos \omega_1(t-t_0) & \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\omega t_0} \sin \omega_1(t-t_0) \\ -e^{-i\omega(t+t_0)} \sin^2 \frac{\omega_1(t-t_0)}{2} & \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t} \sin \omega_1(t-t_0) & e^{-i\omega(t-t_0)} \cos^2 \frac{\omega_1(t-t_0)}{2} \end{pmatrix} \quad (10.3.15)$$

a matice celkového evolučního operátoru pak získá tvar

$$U_F^{\text{rez}} = \begin{pmatrix} e^{i\omega(2\tau+T)} \cos^2 \omega_1 \tau & \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\omega(2\tau+T)} \sin 2\omega_1 \tau & -e^{i\omega(2\tau+T)} \sin^2 \omega_1 \tau \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \sin 2\omega_1 \tau & \cos 2\omega_1 \tau & \frac{i}{\sqrt{2}} \sin 2\omega_1 \tau \\ -e^{-i\omega(2\tau+T)} \sin^2 \omega_1 \tau & \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\omega(2\tau+T)} \sin 2\omega_1 \tau & e^{-i\omega(2\tau+T)} \cos^2 \omega_1 \tau \end{pmatrix}. \quad (10.3.16)$$

7. Matice pravděpodobností v rezonančním případě má složky

$$P^{\text{rez}} = \begin{pmatrix} \cos^4 \omega_1 \tau & \frac{1}{2} \sin^2 2\omega_1 \tau & \sin^4 \omega_1 \tau \\ \frac{1}{2} \sin^2 2\omega_1 \tau & \cos^2 2\omega_1 \tau & \frac{1}{2} \sin^2 2\omega_1 \tau \\ \sin^4 \omega_1 \tau & \frac{1}{2} \sin^2 2\omega_1 \tau & \cos^4 \omega_1 \tau \end{pmatrix}. \quad (10.3.17)$$

Při speciálním naladění frekvence ω_1 a doby τ vychází podobně jako v Ramseyově přístroji pro spin $\frac{1}{2}$ (10.2.27)

$$\begin{aligned} \omega_1 \tau = k\pi & \quad P^{\text{rez}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \quad \text{– spin projde bez změny} \\ \omega_1 \tau = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi & \quad P^{\text{rez}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \quad \text{– 100% pravděpodobnost překlopení spinu} \\ \omega_1 \tau = \frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi & \quad P^{\text{rez}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} & \quad (10.3.18) \end{aligned}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$.

10.4 Volné mionium

Mionium je vázaný stav (anti-)mionu μ^+ s elektronem, podobný např. atomu vodíku. Vznikne při ozařování vzorku svazkem μ^+ . Miony se interakcí s látkou zpomalují a při dostatečně malé rychlosti zachytí elektron. S ním vytvoří vázaný stav, který se velmi rychle (řádově za 10^{-9} s, pro srovnání střední doba života μ^+ je $\tau_{\mu^+} = 2,2 \mu\text{s}$) dostane do základního stavu. Při ozařování slabé fólie kovu je mionium po zachytu elektronu elektricky neutrální a volné a díky tomu může difundovat ven ze vzorku.

Nachází-li se mionium v základním stavu, lze interakci spinu mionu a spinu elektronu popsat Hamiltoniánem²⁹

$$\hat{H} = E_0 + \frac{A}{\hbar^2} \hat{\mathbf{s}}_\mu \cdot \hat{\mathbf{s}}_e, \quad (10.4.2)$$

²⁹Obecný tvar interakčního Hamiltoniánu dvou částic se spinem je (viz např. [10], kapitola 8.6.1.2)

$$H_I = V_0(\mathbf{r}) + 4V_\sigma(\mathbf{r}) (\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2) + V_T(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{T}} + \dots, \quad (10.4.1)$$

kde $\hat{\mathbf{T}}$ je tenzorový operátor. Zbývající neuvedené tři členy nejsou invariantní vůči prostorové inverzi.

kde $E_0 = -m_r c^2 \alpha^2 / 2$ [$m_r \equiv m_e m_\mu / (m_e + m_\mu)$] je redukovaná hmotnost elektronu a mionu, α je konstanta jemné struktury, A je vazebná konstanta (její hodnotu lze určit teoreticky), $\hat{\mathbf{S}}_\mu$ je operátor spinu příslušející mionu a $\hat{\mathbf{S}}_e$ operátor spinu příslušející elektronu. Oba spinové operátory jsou definované na Hilbertově prostoru $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(\mu)} \otimes \mathcal{H}^{(e)}$:

$$\hat{\mathbf{S}}_\mu = \frac{\hbar}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(\mu)} \otimes \hat{\mathbf{1}}^{(e)} \quad (10.4.3)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_e = \hat{\mathbf{1}}^{(\mu)} \otimes \frac{\hbar}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(e)}, \quad (10.4.4)$$

přičemž operátor $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ je realizován Pauliho maticemi (2.0.1).

1. Nalezněte maticové vyjádření operátoru $\hat{\mathbf{S}} \equiv \hat{\mathbf{S}}_\mu \cdot \hat{\mathbf{S}}_e$. Spočítejte vlastní hodnoty a vlastní vektory této matice.
2. Ukažte, že vlastní vektory lze označit $|S, S_3\rangle$, kde S je velikost celkového spinu a S_3 je projekce spinu složeného systému do směru osy z .
3. Nalezněte vlastní hodnoty (energetické spektrum) Hamiltoniánu \hat{H} .
4. Předpokládejte, že spin mionu, kterým ozařujeme vzorek, má orientaci ve směru osy z , tj. $|\psi_\mu\rangle = |\uparrow\rangle^{(\mu)}$, a že spin elektronu má libovolně orientovaný spin daný normalizovaným vektorem

$$|\psi_e\rangle = \alpha |\uparrow\rangle^{(e)} + \beta |\downarrow\rangle^{(e)}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (10.4.5)$$

Určete pravděpodobnost naměření jednotlivých energií pro stav $|\psi\rangle \equiv |\psi_\mu\rangle \otimes |\psi_e\rangle$.

5. Nalezněte stav systému $|\psi(t)\rangle$ v čase t .
6. Určete pravděpodobnost $p_{\mu\uparrow}(t)$, že v čase t změříte projekci spinu mionu ve směru osy z . Využijte k tomu projektor

$$\hat{P}_{\mu\uparrow} = |\uparrow\rangle^{(\mu)} \langle\uparrow|^{(\mu)}. \quad (10.4.6)$$

7. Zopakujte celý výpočet pro případ, že stav elektronu na počátku je ve smíšeném stavu daném operátorem hustoty

$$\hat{\rho}_e = a |\uparrow\rangle^{(e)} \langle\uparrow|^{(e)} + b |\downarrow\rangle^{(e)} \langle\downarrow|^{(e)}, \quad (10.4.7)$$

kde $a + b = 1$ (nalezněte matici hustoty složeného systému mion-elektron v čase $t = 0$, následně v čase t , udělejte parciální stopu přes elektronové stavy, které neměříte, a poté aplikujte projektor $\hat{P}_{\mu\uparrow}$).

Poznámka: Příklad je inspirován kapitolou 19 sbírky [3].

Poznámky k notaci: Každý z operátorů $\hat{\mathbf{S}}_{\mu,e}$ je vektorovým operátorem jednoho spinu (mionu, resp. elektronu) působícím na celém Hilbertově prostoru dvou spinů \mathcal{H} . Jedná se tedy o dvě sady tří matic rozměru 4×4 , kde každá ze tří matic operátoru příslušejícího mionu je dána direktním součinem odpovídající Pauliho matice a jednotkové matice,

$$\hat{\mathbf{S}}_{\mu j} = \frac{\hbar}{2} \sigma_j^{(\mu)} \otimes \hat{\mathbf{1}}^{(e)}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (10.4.8)$$

analogicky pro operátor spinu elektronu. Skalární součin se pak provádí mezi složkami vektorů $\hat{\mathbf{S}}_\mu$ a $\hat{\mathbf{S}}_e$, explicitně

$$\hat{\mathbf{S}}_\mu \cdot \hat{\mathbf{S}}_e \equiv \hat{\mathbf{S}}_{\mu 1} \hat{\mathbf{S}}_{e 1} + \hat{\mathbf{S}}_{\mu 2} \hat{\mathbf{S}}_{e 2} + \hat{\mathbf{S}}_{\mu 3} \hat{\mathbf{S}}_{e 3}, \quad (10.4.9)$$

kde součiny jsou běžné maticové součiny matic 4×4 (v každém sčítanci se tedy jedná o postupné působení dvou operátorů na prvky Hilbertova prostoru \mathcal{H} ; z konstrukce je jasné, že operátory $\hat{\mathbf{S}}_{\mu j}$ komutují s $\hat{\mathbf{S}}_{e j}$, nezáleží tedy na pořadí jejich působení; navíc jsou hermitovské, není tedy nutné ošetřovat sdružení matic na levé straně skalárního součinu).

Řešení:

1. Explicitní vyjádření spinových operátorů $\hat{\mathbf{s}}_{\mu,e}$ v maticové realizaci na Hilbertově prostoru celého systému s bází $\mathcal{B} = \{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ je (viz též příklad 3.1)

$$\mathbf{s}_{\mu} = \frac{\hbar}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right), \quad (10.4.10)$$

$$\mathbf{s}_e = \frac{\hbar}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right]. \quad (10.4.11)$$

Tyto vektory skalárně vynásobené vedou na matici³⁰

$$\mathbf{s} = \frac{\hbar^2}{4} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad (10.4.15)$$

$$= \frac{\hbar^2}{4} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{s}}} \quad (10.4.16)$$

($\tilde{\mathbf{s}}$ označuje matici bez rozměrového faktoru $\hbar^2/4$). **Matrice $\tilde{\mathbf{s}}$ má blokově diagonální tvar, díky čemuž lze dvě její vlastní hodnoty ihned určit,**

$$\tilde{s}_{1,4} = 1, \quad (10.4.17)$$

zbývající dvě jsou řešením sekulární rovnice vnitřního bloku 2×2 ,

$$\det \begin{pmatrix} -1 - \tilde{s} & 2 \\ 2 & -1 - \tilde{s} \end{pmatrix} = (\tilde{s} + 1)^2 - 4 = 0, \quad (10.4.18)$$

které dává

$$\tilde{s}_2 = 1, \quad \tilde{s}_3 = -3. \quad (10.4.19)$$

Matrice \mathbf{s} má tedy trojnásobně degenerovanou vlastní hodnotu (*tripletní stav*) s vlastními vektory

$$s_{1,2,4} = \frac{\hbar^2}{4} \quad |s_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |\uparrow\uparrow\rangle \quad |s_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \quad |s_4\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |\downarrow\downarrow\rangle \quad (10.4.20)$$

a jednou degenerovanou vlastní hodnotu (*singletní stav*) s vlastním vektorem

$$s_3 = -\frac{3}{4}\hbar^2 \quad |s_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (10.4.21)$$

³⁰Operátor $\hat{\mathbf{s}}$ lze zavést ekvivalentně přímo přes tenzorový součin

$$\hat{\mathbf{s}} \equiv \frac{\hbar}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mu} \otimes \frac{\hbar}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_e, \quad (10.4.12)$$

což v maticové realizaci vede na stejný výsledek pro matici \mathbf{s} :

$$\mathbf{s} = \frac{\hbar^2}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \quad (10.4.13)$$

$$= \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.4.14)$$

2. Operátor celkového spinu $\hat{\mathbf{S}}$ splňuje relace pro moment hybnosti

$$[\hat{S}_j, \hat{S}_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}\hat{S}_l, \quad (10.4.22)$$

což znamená, že existují společné vlastní vektory jeho kvadrátu $\hat{\mathbf{S}}^2$ a jeho třetí složky \hat{S}_3

$$\hat{\mathbf{S}}^2 |S, S_3\rangle = \hbar^2 S(S+1) |S, S_3\rangle, \quad (10.4.23)$$

$$\hat{S}_3 |S, S_3\rangle = \hbar S_3 |S, S_3\rangle, \quad (10.4.24)$$

O tom se lze přesvědčit následujícím přímým výpočtem. Operátor spinu systému složeného ze dvou spinů $\frac{1}{2}$ byl jako matice vyjádřen již v příkladu 3.1, takže

$$\mathbf{S}^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}_3 = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10.4.25)$$

Matice \mathbf{S}^2 má trojnásobně degenerovanou vlastní hodnotu $2\hbar^2$ (tripletní stav, odpovídá velikosti momentu hybnosti $S = 1$) a nedegenerovanou vlastní hodnotu 0 (singletní stav, odpovídá momentu hybnosti $S = 0$). Společné vlastní vektory matic \mathbf{S}^2 a \mathbf{S}_3 příslušející vlastním číslům S, S_3 tedy jsou

$$|1, 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1, -1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.4.26)$$

Tento výsledek vyjadřuje skutečnost, že dva spiny o velikosti $\frac{1}{2}$ lze složit třemi způsoby na spin velikosti 1 a jedním způsobem na spin velikosti 0: pokud spiny $\frac{1}{2}$ míří podél osy z , složí se na stav $|1, 1\rangle$, pokud míří proti ose z , složí se na stav $|1, -1\rangle$; pokud však jeden spin míří podél osy z a druhý proti ní, mohou se složit buď na stav $|1, 0\rangle$ s celkovým spinem $S = 1$ nebo na stav $|0, 0\rangle$ s celkovým spinem $S = 0$ (projekce na osu z je v obou těchto případech samozřejmě $S_3 = 0$).

Srovnání s vlastními vektory předchozího bodu vede k závěru, že stavy příslušející vlastní hodnotě $s_{1,2,4}$ odpovídají stavům s $S = 1$ a stav s_3 odpovídá stavu s $S = 0$.

3. Vlastní hodnoty a odpovídající vlastní vektory Hamiltoniánu popisujícího mionium (10.4.2) se díky linearitě získají dosažením parametrů a konstant:

$$E_{1,2,4} = E_0 + \frac{A}{\hbar^2} s_{1,2,4} = E_0 + \frac{A}{4} \quad \begin{aligned} |E_1\rangle &= |1, 1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \\ |E_2\rangle &= |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |E_4\rangle &= |1, -1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \end{aligned} \quad (10.4.27a)$$

$$E_3 = E_0 + \frac{A}{\hbar^2} s_3 = E_0 - \frac{3A}{4} \quad |E_3\rangle = |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (10.4.27b)$$

4. Vektor $|\psi\rangle$ se v bázi \mathcal{B} a v bázi $\{|S, S_3\rangle; S = 0, 1; S_3 = -S, \dots, S\}$ vyjádří jako

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{(\mu)} \otimes \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{(e)} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha |\uparrow\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\downarrow\rangle = \alpha |1, 1\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + |0, 0\rangle). \quad (10.4.28)$$

Pravděpodobnosti naměření energií $E_{1,2,4}$, resp. E_3 systému připraveného ve stavu $|\psi\rangle$ jsou tudíž

$$p_{1,2,4} = |\langle E_1|\psi\rangle|^2 + |\langle E_2|\psi\rangle|^2 + |\langle E_4|\psi\rangle|^2 = \alpha^2 + \frac{1}{2}\beta^2, \quad (10.4.29a)$$

$$p_3 = |\langle E_3|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}\beta^2. \quad (10.4.29b)$$

5. Stav systému v čase t je dán evolučním operátorem, který lze vyjádřit díky znalosti spektrálního rozkladu Hamiltoniánu:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} |\psi\rangle = \sum_{k=1}^4 e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} |E_k\rangle \langle E_k|\psi\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+\frac{A}{4})t} \left(\alpha |1,1\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} |1,0\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} e^{\frac{i}{\hbar}At} |0,0\rangle \right) \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+\frac{A}{4})t} \left[\alpha |\uparrow\uparrow\rangle + \beta e^{\frac{i}{2\hbar}At} \left(\cos \frac{At}{2\hbar} |\uparrow\downarrow\rangle - i \sin \frac{At}{2\hbar} |\downarrow\uparrow\rangle \right) \right]. \end{aligned} \quad (10.4.30)$$

6. Pravděpodobnost nalezení mionu ve stavu $|\uparrow\rangle^{(\mu)}$ v čase t pak je

$$p_{\mu\uparrow}(t) = \langle \psi(t) | \hat{P}_{\mu\uparrow} | \psi(t) \rangle = \left| \hat{P}_{\mu\uparrow} |\psi(t)\rangle \right|^2. \quad (10.4.31)$$

Projektor (10.4.6) působí na báze vektory vyskytující se v rozvoji stavu $|\psi(t)\rangle$ jako³¹

$$\hat{P}_{\mu\uparrow} |1,1\rangle = \hat{P}_{\mu\uparrow} |\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, \quad (10.4.32a)$$

$$\hat{P}_{\mu\uparrow} |1,0\rangle = \hat{P}_{\mu\uparrow} |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\downarrow\rangle, \quad (10.4.32b)$$

takže

$$\hat{P}_{\mu\uparrow} |\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+\frac{A}{4})t} \left(\alpha |\uparrow\uparrow\rangle + \beta e^{\frac{i}{2\hbar}At} \cos \frac{At}{2\hbar} |\uparrow\downarrow\rangle \right) \quad (10.4.33)$$

a díky ortogonalitě vektorů $|\uparrow\uparrow\rangle$ a $|\uparrow\downarrow\rangle$ je hledaná pravděpodobnost

$$p_{\mu\uparrow}(t) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 \cos^2 \frac{At}{2\hbar}. \quad (10.4.34)$$

Tento výsledek lze interpretovat jako rotaci spinu mionu s úhlovou frekvencí

$$\omega = \frac{A}{2\hbar}. \quad (10.4.35)$$

Speciální případy: Pokud je na počátku elektron polarizován podél osy z , tj. $(\alpha, \beta) = (1, 0)$, a nachází se ve stavu $|\psi_e\rangle = |\uparrow\rangle^{(e)}$, k žádné rotaci mionu nedochází. Naopak pokud na počátku spin elektronu míří proti ose z , tj. $(\alpha, \beta) = (0, 1)$, což odpovídá stavu $|\psi_e\rangle = |\downarrow\rangle^{(e)}$, je modulace spinu mionu důsledkem rotace nejsilnější a pro časy

$$t_{\text{flip}} \equiv \frac{2\pi\hbar}{A} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (10.4.36)$$

dochází dokonce k jeho úplnému překlopení.

7. Matice hustoty v čase $t = 0$ má tvar

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(0) &= a |\uparrow\uparrow\rangle \langle\uparrow\uparrow| + b |\uparrow\downarrow\rangle \langle\uparrow\downarrow| \\ &= a |1,1\rangle \langle 1,1| + \frac{b}{2} (|1,0\rangle \langle 1,0| + |1,0\rangle \langle 0,0| + |0,0\rangle \langle 1,0| + |0,0\rangle \langle 0,0|) \end{aligned} \quad (10.4.37)$$

a v čase se vyvíjí podle vztahu

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) &= \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}^{-1}(t) \\ &= a |1,1\rangle \langle 1,1| + \frac{b}{2} \left(|1,0\rangle \langle 1,0| + e^{-\frac{i}{\hbar}At} |1,0\rangle \langle 0,0| + e^{\frac{i}{\hbar}At} |0,0\rangle \langle 1,0| + |0,0\rangle \langle 0,0| \right) \\ &= a |\uparrow\uparrow\rangle \langle\uparrow\uparrow| + \frac{b}{2} \left[|\uparrow\downarrow\rangle \langle\uparrow\downarrow| + |\downarrow\uparrow\rangle \langle\downarrow\uparrow| \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{At}{\hbar} (|\uparrow\downarrow\rangle \langle\uparrow\downarrow| - |\downarrow\uparrow\rangle \langle\downarrow\uparrow|) + i \sin \frac{At}{\hbar} (|\uparrow\downarrow\rangle \langle\downarrow\uparrow| - |\downarrow\uparrow\rangle \langle\uparrow\downarrow|) \right]. \end{aligned} \quad (10.4.38)$$

³¹Přesněji se zde používá nikoliv projektor $\hat{P}_{\mu\uparrow}$, který působí pouze na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}^{(\mu)}$, nýbrž $\hat{P}_{\mu\uparrow} \otimes \hat{1}^{(e)}$ celého Hilbertova prostoru \hat{H} . Pro zjednodušení zápisu se operátor identity spojený s elektronovým podprostorem vynechává.

Parciální stopa přes elektronové stavy vede na parciální matici hustoty

$$\begin{aligned}\hat{\rho}^{(\mu)}(t) &= \text{Tr}_e \hat{\rho}(t) = \langle \uparrow |^{(e)} \hat{\rho}(t) | \uparrow \rangle^{(e)} + \langle \downarrow |^{(e)} \hat{\rho}(t) | \downarrow \rangle^{(e)} \\ &= a |\uparrow\rangle^{(\mu)} \langle \uparrow|^{(\mu)} + \frac{b}{2} \left[|\uparrow\rangle^{(\mu)} \langle \uparrow|^{(\mu)} + |\downarrow\rangle^{(\mu)} \langle \downarrow|^{(\mu)} + \cos \frac{At}{\hbar} \left(|\uparrow\rangle^{(\mu)} \langle \uparrow|^{(\mu)} + |\downarrow\rangle^{(\mu)} \langle \downarrow|^{(\mu)} \right) \right],\end{aligned}\quad (10.4.39)$$

ze které se pomocí projektoru (10.4.6) určí pravděpodobnost nalezení mionu ve stavu $|+\rangle^{(\mu)}$,

$$p'_{\mu\uparrow}(t) = \text{Tr}_\mu \hat{P}_{\mu\uparrow} \hat{\rho}^{(\mu)}(t) = \langle + |^{(\mu)} \hat{\rho}^{(\mu)}(t) | + \rangle^{(\mu)} = a + \frac{b}{2} \left(1 + \cos \frac{At}{\hbar} \right) = a + b \cos^2 \frac{At}{2\hbar}. \quad (10.4.40)$$

Pravděpodobnost nalezení mionu ve stavu, kdy míří podél osy z v čase t , tedy nezávisí na tom, jestli je na počátku elektron v čistém stavu daném superpozicí (10.4.5), nebo ve smíšeném stavu popsaném maticí hustoty (10.4.7). Zcela nekoherentní směs $a = b = 1/\sqrt{2}$ nebo $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ dá stejnou pravděpodobnost naměření spinu mionu mířícího vzhůru

$$p_{\mu\uparrow}^{(0)}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{At}{2\hbar} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos \frac{At}{\hbar}. \quad (10.4.41)$$

10.5 Mionium v křemíku

Pokud se dostatečně silná vrstva krystalu křemíku bombarduje (anti-)miony μ^+ , vznikne mionium a naváže se uvnitř krystalové mřížky za tvorby šesterečné struktury s okolními atomy. Interakce mionia s krystalem se dá modelovat Hamiltoniánem

$$\hat{H}' = E_0 + \frac{A'}{\hbar^2} \hat{\mathbf{s}}_\mu \cdot \hat{\mathbf{s}}_e + \frac{D}{\hbar^2} \hat{s}_{\mu 3} \hat{s}_{e 3}, \quad (10.5.1)$$

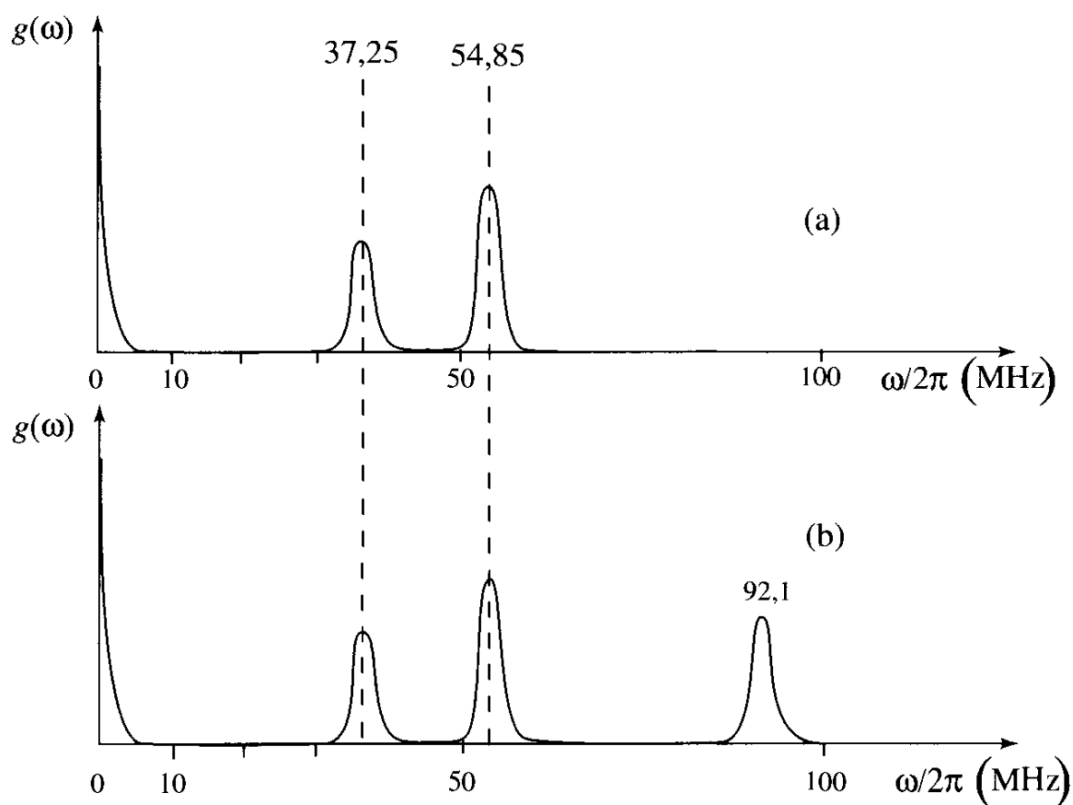
což je rozšířený Hamiltonián volného mionia. Interakce s mřížkou je popsána druhým a třetím členem, proto je v obecném případě konstanta A' odlišná od konstanty A pro volné mionium.³² Konstanty $A' > 0$, $D < 0$ se určují experimentálně, jejich znaménko je dané.

1. Napište matici Hamiltoniánu \hat{H}' a určete její vlastní hodnoty a vlastní stavy.
2. Předpokládejte, že dopadající miony jsou polarizovány do kladného směru osy x , tj. $|\psi_\mu\rangle = |x+\rangle^{(\mu)} = |+\rangle^{(\mu)}$. Nalezněte vyjádření počátečního vektoru mionu v bázi $\{|\uparrow\rangle^{(\mu)}, |\downarrow\rangle^{(\mu)}\}$.
3. Předpokládejte, že elektrony jsou před vznikem mionia polarizovány v kladném, resp. záporném směru osy z , tj. uvažujeme dva případy $|\psi_{e\uparrow}\rangle = |\uparrow\rangle^{(e)}$, $|\psi_{e\downarrow}\rangle = |\downarrow\rangle^{(e)}$. Nalezněte stav složeného systému elektron-mion v čase $t = 0$, v čase t a pravděpodobnost $p_{\mu\rightarrow}(t)$, že v čase t naměříte spin mionu orientovaný ve směru osy x pro obě dvě počáteční orientace spinu elektronu.
4. Spočítejte totéž jako v předchozím bodu pro případ, že jsou elektrony na počátku ve smíšeném stavu

$$\hat{\rho}_e = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle^{(e)} \langle \uparrow|^{(e)} + \frac{1}{2} |\downarrow\rangle^{(e)} \langle \downarrow|^{(e)}. \quad (10.5.2)$$

Pravděpodobnost označte $p'_{\mu\rightarrow}(t)$.

³²Poslední člen v Hamiltoniánu narušuje sférickou symetrii interakce. Rotační symetrie okolo osy z však zůstane zachována.



Obrázek 22: Naměřená funkce $g(\omega) = \text{Re } f(\omega)$ pro mionium (převzato z [3]).

Srovnání s experimentem:

Z důvodu konečné doby života se mion v mioniu rozpadá a emituje pozitron e^+ s největší pravděpodobností ve směru polarizace mionia. V praxi se tedy měří směr vylétávajícího pozitronu jako funkce času t . Při bombardování balíkem N_0 mionů je počet pozitronů v čase vylétávajících podél osy x

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{N_0}{\tau} p_{\mu \rightarrow}(t) e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (10.5.3)$$

přičemž faktor $\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ ve výrazu postihuje exponenciální rozpad mionu se střední dobou $\tau \approx 2.2 \mu\text{s}$. Experimentálně se neměří přímo pravděpodobnost $p_{\mu \rightarrow}(t)$, nýbrž tzv. *charakteristická funkce* $g(\omega) = \text{Re } f(\omega)$, kde

$$f(\omega) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} p_{\mu \rightarrow}(t) e^{-\frac{t}{\tau}} e^{i\omega t} dt \quad (10.5.4)$$

je Fourierova transformace funkce $\frac{p_{\mu \rightarrow}(t)}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$. Příklad naměřené funkce $g(\omega)$ je na obrázku 22.

5. Nalezněte explicitní výraz pro $f(\omega)$ pomocí $f_0(\omega)$, kde

$$f_0(\omega) \equiv \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{i\omega t} dt \quad (10.5.5)$$

je charakteristická funkce volného mionu.

6. Z udané hodnoty střední doby života mionu určete, jaká by měla být pološířka vrcholů.
7. Z měření zobrazeném na obrázku 22(a) nalezněte hodnoty parametrů A' a D .
8. Na obrázku 22(b) je totéž měření, jen uspořádání měřícího zařízení bylo lehce pozměněno. Diskutujte, k jaké změně v zapojení experimentu došlo.

Řešení:

1. Matice Hamiltoniánu \hat{H}' vyjádřená v bázi \mathcal{B} (3.1.14) má tvar

$$H' = E_0 + \begin{pmatrix} \frac{A'}{4} + D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A'}{4} - D & \frac{A'}{2} & 0 \\ 0 & \frac{A'}{2} & -\frac{A'}{4} - D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A'}{4} + D \end{pmatrix} \quad (10.5.6)$$

a spektrum po zdiagonalizování je

$$E'_{1,4} = E_0 + \frac{A'}{4} + D, \quad \begin{cases} |E'_1\rangle = |1, 1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \\ |E'_4\rangle = |1, -1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \end{cases}, \quad (10.5.7a)$$

$$E'_2 = E_0 + \frac{A'}{4} - D, \quad |E'_2\rangle = |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), \quad (10.5.7b)$$

$$E'_3 = E_0 - \frac{3A'}{4} - D, \quad |E'_3\rangle = |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (10.5.7c)$$

Vlastní vektory jsou tedy totožné jako v případě volného mionia, jediný rozdíl je v tom, že dodatečná interakce řízená parametrem D rozštěpila tripletní stav.

2. Počáteční stav mionu je podle (2.0.4)

$$|\psi_\mu\rangle = |\rightarrow\rangle^{(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle^{(\mu)} + |\downarrow\rangle^{(\mu)}). \quad (10.5.8)$$

3. Počáteční stav složeného systému mion+elektron je

$$|\psi_+\rangle = |\psi_\mu\rangle \otimes |\psi_{e\uparrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 1\rangle + \frac{1}{2} (|1, 0\rangle - |0, 0\rangle), \quad (10.5.9a)$$

$$|\psi_-\rangle = |\psi_\mu\rangle \otimes |\psi_{e\downarrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} |1, -1\rangle + \frac{1}{2} (|1, 0\rangle + |0, 0\rangle). \quad (10.5.9b)$$

Stav složeného systému v libovolném čase t je pak dán evolucí

$$\begin{aligned} |\psi_+(t)\rangle &= \frac{e^{-i\omega_1 t}}{\sqrt{2}} |1, 1\rangle + \frac{e^{-i\omega_2 t}}{2} |1, 0\rangle - \frac{e^{-i\omega_3 t}}{2} |0, 0\rangle \\ &= \frac{e^{-i\omega_1 t}}{\sqrt{2}} |\uparrow\uparrow\rangle + \frac{e^{-i\omega_2 t} - e^{-i\omega_3 t}}{2\sqrt{2}} |\uparrow\downarrow\rangle + \frac{e^{-i\omega_2 t} + e^{-i\omega_3 t}}{2\sqrt{2}} |\downarrow\uparrow\rangle, \end{aligned} \quad (10.5.10a)$$

$$\begin{aligned} |\psi_-(t)\rangle &= \frac{e^{-i\omega_4 t}}{\sqrt{2}} |1, -1\rangle + \frac{e^{-i\omega_2 t}}{2} |1, 0\rangle + \frac{e^{-i\omega_3 t}}{2} |0, 0\rangle \\ &= \frac{e^{-i\omega_4 t}}{\sqrt{2}} |\downarrow\downarrow\rangle + \frac{e^{-i\omega_2 t} + e^{-i\omega_3 t}}{2\sqrt{2}} |\uparrow\downarrow\rangle + \frac{e^{-i\omega_2 t} - e^{-i\omega_3 t}}{2\sqrt{2}} |\downarrow\uparrow\rangle, \end{aligned} \quad (10.5.10b)$$

kde $\omega_k \equiv E'_k/\hbar$.

Pravděpodobnost nalezení mionu ve stavu $|\rightarrow\rangle^{(\mu)}$ je

$$p_{\pm, \mu \rightarrow}(t) = \langle \psi_\pm(t) | \hat{P}_{\mu \rightarrow} | \psi_\pm(t) \rangle = \left| \hat{P}_{\mu \rightarrow} | \psi_\pm(t) \rangle \right|^2. \quad (10.5.11)$$

Mionový projektor lze díky vztahu mezi projektorem a Pauliho maticemi (2.1.2) vyjádřit ve tvaru

$$\hat{P}_{\mu \rightarrow} \equiv |\rightarrow\rangle^{(\mu)} \langle \rightarrow|^{(\mu)} = \frac{1}{2} (\hat{1}^{(\mu)} + \hat{\sigma}_1^{(\mu)}). \quad (10.5.12)$$

Jelikož $\hat{\sigma}_1 |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$ a obráceně $\hat{\sigma}_1 |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$, platí

$$\begin{aligned} \langle \psi_+(t) | \hat{\sigma}_1 | \psi_+(t) \rangle &= \frac{1}{4} \left[e^{i\omega_1 t} (e^{-i\omega_2 t} + e^{-i\omega_3 t}) + e^{-i\omega_1 t} (e^{i\omega_2 t} + e^{i\omega_3 t}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[e^{i\omega_1 t} (e^{-i\omega_2 t} + e^{-i\omega_3 t}) \right] = \frac{1}{2} [\cos(\omega_1 - \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_3)t] \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{2Dt}{\hbar} + \cos \frac{(A' + 2D)t}{\hbar} \right], \end{aligned} \quad (10.5.13a)$$

$$\langle \psi_-(t) | \hat{\sigma}_1 | \psi_-(t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[e^{i\omega_4 t} (e^{-i\omega_2 t} + e^{-i\omega_3 t}) \right] = \langle \psi_+(t) | \hat{\sigma}_1 | \psi_+(t) \rangle \quad (10.5.13b)$$

(poslední rovnost plyne z $\omega_1 = \omega_4$). Hledaná pravděpodobnost tedy nezáleží na tom, zda na počátku mívá spin elektronu podél nebo proti směru osy z , a rovná se

$$p_{\mu \rightarrow}(t) \equiv p_{\pm, \mu \rightarrow}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[\cos \frac{2Dt}{\hbar} + \cos \frac{(A' + 2D)t}{\hbar} \right]. \quad (10.5.14)$$

4. Díky rovnosti pravděpodobností $p_{+, \mu \rightarrow}(t) = p_{-, \mu \rightarrow}(t)$ dostaneme pro smíšený stav tutéž pravděpodobnost jako v předchozím bodě:

$$p'_{\mu \rightarrow}(t) = \frac{1}{2} [p_{+, \mu \rightarrow}(t) + p_{-, \mu \rightarrow}(t)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[\cos \frac{2Dt}{\hbar} + \cos \frac{(A' + 2D)t}{\hbar} \right]. \quad (10.5.15)$$

5. Rozepsání $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ ve výrazu pro pravděpodobnost $p_{\mu \rightarrow}(t)$ vede na

$$f(\omega) = \frac{1}{2} f_0(\omega) + \frac{1}{8} \left[f_0 \left(\omega - \frac{2D}{\hbar} \right) + f_0 \left(\omega + \frac{2D}{\hbar} \right) \right] + \frac{1}{8} \left[f_0 \left(\omega - \frac{A' + 2D}{\hbar} \right) + f_0 \left(\omega + \frac{A' + 2D}{\hbar} \right) \right]. \quad (10.5.16)$$

6. Fourierova transformace funkce exponenciálního rozpadu je funkce

$$f_0(\omega) = \frac{1}{1 - i\omega\tau}, \quad (10.5.17)$$

s reálnou hodnotou

$$g_0(\omega) = \text{Re } f_0(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad (10.5.18)$$

což je (nenormované) Breit-Wignerovo rozdělení s pološířkou

$$\text{HWHM} = \frac{1}{\tau} = 450 \text{ kHz}. \quad (10.5.19)$$

7. Jelikož musí být $D < 0$, $A' > 0$, můžeme vrcholy přiřadit parametrům těmito dvěma způsoby:

$$1. \quad \frac{2D}{\hbar} = -37.25 \text{ MHz}, \quad \frac{A' + 2D}{\hbar} = 54.85 \text{ MHz} \quad \implies \quad \frac{A'}{\hbar} = 92.1 \text{ MHz} \quad (10.5.20a)$$

$$2. \quad \frac{2D}{\hbar} = -54.85 \text{ MHz}, \quad \frac{A' + 2D}{\hbar} = 37.25 \text{ MHz} \quad \implies \quad \frac{A'}{\hbar} = 92.1 \text{ MHz}. \quad (10.5.20b)$$

8. V obrázku 22(b) se objevuje vrchol na frekvenci $A'/\hbar = 92.1 \text{ MHz}$, což odpovídá rozdílu frekvencí $\omega_2 - \omega_3$. Ten se ve výrazu pro pravděpodobnost objeví, bude-li se měřit výsledný spin mionu podél osy, která nebude kolmá na osu z .