Domácí úkol – Ramseyův přístroj pro spin 1

Částice se spinem 1 a velikostí magnetického momentu μ, popsaná vlnovou funkcí

$$|\psi(t)\rangle = \psi_{+1}(t)\,|+1\rangle + \psi_0(t)\,|0\rangle + \psi_{-1}(t)\,|-1\rangle = \begin{pmatrix} \psi_{+1}(t) \\ \psi_0(t) \\ \psi_{-1}(t) \end{pmatrix},$$

kde dolní index určuje projekci spinu na osu z, se pohybuje v zařízení složeném ze tří oblastí. V první oblasti (1. Ramseyova oblast) je zapnuté magnetické pole složené ze stacionární složky $\boldsymbol{B}_0$ směřující podél osy z a rotující složky $\boldsymbol{B}_1(t)$ v rovině (x, y),

$$\boldsymbol{B}_0 = (0, 0, B_0), \qquad\qquad \boldsymbol{B}_1(t) = (B_1 \cos\omega t, -B_1 \sin\omega t, 0),$$

a částice v ní stráví dobu dobu τ. V druhé oblasti je rotující pole vypnuto a po dobu T se částice pohybuje pouze ve stacionárním poli $\boldsymbol{B}_0$. Poté (2. Ramseyova oblast) je rotující pole zapnuto, a to opět na dobu τ.

1. Matice generující rotace částice se spinem 1 jsou $\mathsf{S}^{(1)}_j = \hbar \mathsf{s}_j$, kde

   $$\mathsf{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{s}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Ukažte, že tyto matice splňují komutační relace pro moment hybnosti

   $$\left[\mathsf{s}_j, \mathsf{s}_k\right] = \mathrm{i}\epsilon_{jkl}\mathsf{s}_l\,.$$

   (Matice s_j jsou analogické k Pauliho maticím σ_j popisujícím částici se spinem 1/2 a tvoří generátory třírozměrné ireducibilní reprezentace grupy SU(2).)

2. Dokažte, že pro matice s_j platí $\mathsf{s}_j^{n+2} = \mathsf{s}_j^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, a na základě tohoto vztahu vyjádřete exponenciálu

   $$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{s})} = ?$$

   kde $\hat{\boldsymbol{n}}$ je jednotkový vektor určující osu rotace, okolo které se systém otočí o úhel ϕ, a

   $$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{s} \equiv \hat{n}_1\mathsf{s}_1 + \hat{n}_2\mathsf{s}_2 + \hat{n}_3\mathsf{s}_3\,.$$

3. Vyjádřete složky evolučního operátoru

   $$\mathsf{U}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t \mathsf{s}_3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t(\hat{\boldsymbol{n}}_\Omega\cdot\mathbf{s})},$$

   kde

   $$\Omega = \sqrt{(\omega-\omega_0)^2 + \omega_1^2}, \qquad \hat{\boldsymbol{n}}_\Omega = \frac{1}{\Omega}\begin{pmatrix} -\omega_1 \\ 0 \\ \omega - \omega_0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_{0,1} = \frac{2\mu}{\hbar}B_{0,1}\,.$$

4. Vyjádřete složky evolučního operátoru $\mathsf{U}(t; t_0)$, který vyvíjí systém z času t_0 do času t.

5. Vyjádřete složky evolučního operátoru $\mathsf{U}_0(\tau + T; \tau)$ oblasti, kde je vypnuté pole $\boldsymbol{B}_1$.

6. Proces průchodu zařízením složeným z dvou Ramseyových oblastí s mezioblastí s vypnutým polem B_1 je dán evolučním operátorem

   $$\mathsf{U}_F = \mathsf{U}(2\tau + T; \tau + T)\mathsf{U}_0(\tau + T; \tau)\mathsf{U}(\tau; 0)\,.$$

   Vyjádřete složky evolučního operátoru $\mathsf{U}_F^{\mathrm{rez}}$ pro speciální případ $\omega = \omega_0$ (frekvence oscilujícího magnetického pole $\boldsymbol{B}_1$ je v rezonanci s Larmorovou frekvencí ω_0).

7. Vypočítejte matici $\mathsf{p}^{\mathrm{rez}}$ se složkami p^{rez}_{fi}, které udávají pravděpodobnosti, že systém připravený na před vstupem do přístroje ve stavu s projekcí spinu na osu z rovnou $i \in \{+1, 0, -1\}$, naměříme po průchodu zařízením ve stavu s projekcí spinu $f \in \{+1, 0, -1\}$. Jaká podmínka musí být splněna, aby byla pravděpodobnost překlopení spinu největší?