12 Měření

12.1 Ramseyův přístroj s měřením

Tento příklad navazuje na příklad 10.2.

Předpokládejme, že na oblasti s vypnutým oscilujícím polem $\boldsymbol{B}_1$ provedeme měření pomocí dvouhladinového systému (například pomocí další částice se spinem 1/2). Namísto Hamiltoniánu

$$\mathsf{H}_0 = -\mu\sigma_3 B_0 \tag{12.1.1}$$

budeme uvažovat Hamiltonián

$$\mathsf{H}_0' = \begin{cases} -\mu B_0 \sigma_3 \otimes (1 + \lambda \mathsf{m}) \,, & \tau \le t < \tau + T_0 \,, \\ -\mu B_0 \sigma_3 \otimes 1 \,, & \tau + T_0 \le t < \tau + T \,, \end{cases} \tag{12.1.2}$$

kde

$$\mathsf{m} \equiv \frac{1}{2}(1 - \sigma_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \tag{12.1.3}$$

Tento Hamiltonián působí na Hilbertově prostoru $\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_m$, což je tenzorový součin Hilbertova prostoru $\mathcal{H}_s$ spinu prolétajícího Ramseyovým přístrojem a Hilbertova prostoru $\mathcal{H}_m$ měřícího dvouhladinového systému.

Dobu T_0 zvolíme speciálně jako (při využití notace (11.1.4) zimního semestru)

$$T_0 = \frac{\hbar\pi}{2\mu B_0 \lambda} = \frac{\pi}{\omega_0 \lambda} \,, \tag{12.1.4}$$

což, jak se ukáže během řešení, je doba potřebná k tomu, aby na sebe měřící zařízení přijalo kvantovou informaci o směru prolétavajícího spinu.

1. Nalezněte evoluční operátor $\mathsf{U}_0'(T)$ v oblasti mezi dvěma Ramseyovými zónami.
2. Za počáteční stav měřícího zařízení budeme uvažovat

$$|\phi_i\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i} \\ 1 + \mathrm{i} \end{pmatrix} . \tag{12.1.5}$$

   V případě, že by měřící zařízení byl spin 1/2, ukažte, do jakého směru by mířil.
3. Ukažte, že pro počáteční stav ve tvaru

$$|\psi_i'\rangle = |\psi_i\rangle \otimes |\phi_i\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i} \\ 1 + \mathrm{i} \end{pmatrix} \tag{12.1.6}$$

   lze pravděpodobnost naměření koncového stavu, ve kterém je spin, který prolétl Ramseyovým zařízením otočený dolů bez ohledu na to, jaký je stav měřícího zařízení, vyjádřit jako

$$p_{\downarrow\uparrow} = \left|A_{\downarrow\uparrow\uparrow}\right|^2 + \left|A_{\downarrow\downarrow\uparrow}\right|^2 , \tag{12.1.7}$$

   kde $A_{\downarrow\uparrow\uparrow}$ a $A_{\downarrow\downarrow\uparrow}$ jsou definovány ve výrazu (10.2.22). Měřením tedy vymizí interferenční člen.

Řešení:

1. Evoluční operátor pro část Hamiltoniánu

$$\mathsf{h} \equiv -\underbrace{\mu B_0}_{\frac{\hbar\omega_0}{2}} \lambda \sigma_3 \otimes \mathsf{m} \tag{12.1.8}$$

se spočítá rozvinutím do řady:

$$\mathsf{u} \equiv \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathsf{h}T_0} = \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{\mathrm{i}\omega_0\lambda T_0}{2}\right)}_{a}^{j} \frac{1}{j!} (\sigma_3 \otimes \mathsf{m})^j \,. \tag{12.1.9}$$

Jelikož

$$\sigma_3^2 = \mathsf{1}, \tag{12.1.10}$$
$$\mathsf{m}^2 = \mathsf{m}, \tag{12.1.11}$$

vychází

$$\begin{aligned}\mathsf{u} &= \mathsf{1} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^{2j+1}}{(2j+1)!}\sigma_3 \otimes \mathsf{m} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a^{2j}}{(2j)!}\mathsf{1} \otimes \mathsf{m} \\ &= \mathsf{1} \otimes \mathsf{1} + \left[\mathrm{i}\sigma_3 \sin\frac{\omega_0\lambda T_0}{2} + \mathsf{1}\left(\cos\frac{\omega_0\lambda T_0}{2} - 1\right)\right] \otimes \mathsf{m}.\end{aligned} \tag{12.1.12}$$

Speciální volba T_0 podle (12.1.4) vede na

$$\mathsf{u} = \mathsf{1} \otimes \mathsf{1} + (\mathrm{i}\sigma_3 - \mathsf{1}) \otimes \mathsf{m}. \tag{12.1.13}$$

Jelikož h komutuje s $\mathsf{H}_0 = -\mu B_0 \sigma_3 \otimes \mathsf{1}$, lze psát

$$\begin{aligned}\mathsf{U}_0'(T) &= \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathsf{H}_0 T}\, \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathsf{h}T} \\ &= \left[\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} \end{pmatrix} \otimes \mathsf{1}\right] [\mathsf{1} \otimes \mathsf{1} + (\mathrm{i}\sigma_3 - \mathsf{1}) \otimes \mathsf{m}] \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} \end{pmatrix} \otimes \mathsf{1} - \begin{pmatrix} (1-\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} & 0 \\ 0 & (1+\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} \end{pmatrix} \otimes \mathsf{m}\,.\end{aligned} \tag{12.1.14}$$

2. Lze využít dvou postupů:

   - V příkladu 2.1 bylo ukázáno, že normalizovaný vektor spinu orientovaného do směru jednotkového vektoru $\hat{\boldsymbol{n}} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ popsaného pomocí sférických úhlů (θ, ϕ) je

     $$|\hat{\boldsymbol{n}}\rangle = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{12.1.15}$$

     Poměr složek

     $$z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\cot\frac{\theta}{2} \tag{12.1.16}$$

     tedy udává úhly (θ, ϕ) (stereografická projekce v [12]). V případě tohoto příkladu je

     $$z = \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = -\mathrm{i} = (\cos\phi - \mathrm{i}\sin\phi)\cot\frac{\theta}{2}\,, \tag{12.1.17}$$

     takže $\phi = \pi/2$ a $\theta = 0$. To odpovídá projekci spinu podél souřadné osy y.

   - Druhý způsob výpočtu spočívá ve vyjádření matice hustoty spinového stavu

     $$\boxed{\rho_{\boldsymbol{n}} = |\boldsymbol{n}\rangle\langle\boldsymbol{n}| = \frac{1}{2}(\mathsf{1} + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})} \tag{12.1.18}$$

     ($|\boldsymbol{n}| = 1$ pro čistý stav, $|\boldsymbol{n}| < 1$ pro smíšený stav). V případě zadaného stavu je

     $$\begin{aligned}\rho_{\phi_i} &= |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathsf{1} + \sigma_2)\,,\end{aligned} \tag{12.1.19}$$

     což opět udává orientaci spinu podél osy y.[38]

[38] Platí tedy, že stav $|\phi_i\rangle$ je vlastním stavem matice σ_2.

3. Koncový stav systému, který vyvíjí počáteční stav $\left|\psi_i'\right\rangle$, je

$$\left|\psi_F'\right\rangle \equiv \left|\psi'(T+2\tau)\right\rangle = \hat{\mathsf{U}}_F' \left|\psi_i'\right\rangle, \tag{12.1.20}$$

kde

$$\hat{\mathsf{U}}_F' \equiv \hat{\mathsf{U}}(2\tau+T,\tau+T)\hat{\mathsf{U}}_0'(T)\hat{\mathsf{U}}(\tau,0). \tag{12.1.21}$$

Hledaná pravděpodobnost je

$$p_{\downarrow\uparrow}' = \left\langle \psi_F' \middle| \hat{\mathsf{P}} \middle| \psi_F' \right\rangle, \tag{12.1.22}$$

kde $\hat{\mathsf{P}}$ je projektor na koncový stav,

$$\hat{\mathsf{P}} = \left|\psi_f\right\rangle\left\langle\psi_f\right| \otimes \hat{1}_m = \left|\psi_f\right\rangle\left\langle\psi_f\right| \otimes (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) = |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|. \tag{12.1.23}$$

Pravděpodobnost se tedy dá rozepsat jako

$$\begin{aligned} p_{\downarrow\uparrow}' &= \left\langle \psi_i' \middle| \hat{\mathsf{U}}_F'^{\dagger} \middle| \downarrow\uparrow \right\rangle \left\langle \downarrow\uparrow \middle| \hat{\mathsf{U}}_F' \middle| \psi_i' \right\rangle + \left\langle \psi_i' \middle| \hat{\mathsf{U}}_F'^{\dagger} \middle| \downarrow\downarrow \right\rangle \left\langle \downarrow\downarrow \middle| \hat{\mathsf{U}}_F' \middle| \psi_i' \right\rangle \\ &= \left\langle \uparrow\otimes \middle| \hat{\mathsf{U}}_F'^{\dagger} \middle| \downarrow\uparrow \right\rangle \left\langle \downarrow\uparrow \middle| \hat{\mathsf{U}}_F' \middle| \uparrow\otimes \right\rangle + \left\langle \uparrow\otimes \middle| \hat{\mathsf{U}}_F'^{\dagger} \middle| \downarrow\downarrow \right\rangle \left\langle \downarrow\downarrow \middle| \hat{\mathsf{U}}_F' \middle| \uparrow\otimes \right\rangle \\ &= \left| A_{\downarrow\uparrow}'^{\uparrow} \right|^2 + \left| A_{\downarrow\uparrow}'^{\downarrow} \right|^2, \end{aligned} \tag{12.1.24}$$

kde horní index značí, jaký stav bude mít výsledný spin, a $|\phi_i\rangle \equiv |\otimes\rangle$. Analogicky s (10.2.22) lze jednotlivé amplitudy dále rozepsat jako

$$\begin{aligned} A_{\downarrow\uparrow}'^{\uparrow} &= \left\langle \downarrow\uparrow \middle| \hat{\mathsf{U}}_F' \middle| \uparrow\otimes \right\rangle \\ &= \left\langle \downarrow\uparrow \middle| \hat{\mathsf{U}}(2\tau+T,\tau+T)\,(|\uparrow_s\rangle\langle\uparrow_s| + |\downarrow_s\rangle\langle\downarrow_s|) \otimes (|\uparrow_m\rangle\langle\uparrow_m| + |\downarrow_m\rangle\langle\downarrow_m|)\,\hat{\mathsf{U}}_0'(T)\hat{\mathsf{U}}(\tau,0) \middle| \uparrow\otimes \right\rangle \\ &= \left\langle \downarrow\uparrow \middle| \hat{\mathsf{U}}(2\tau+T,\tau+T) \middle| \uparrow\uparrow \right\rangle \left\langle \uparrow\uparrow \middle| \hat{\mathsf{U}}_0'(T)\hat{\mathsf{U}}(\tau,0) \middle| \uparrow\otimes \right\rangle + \underbrace{\left\langle \downarrow\uparrow \middle| \hat{\mathsf{U}}(2\tau+T,\tau+T) \middle| \uparrow\downarrow \right\rangle}_{0} \left\langle \uparrow\downarrow \middle| \hat{\mathsf{U}}_0'(T)\hat{\mathsf{U}}(\tau,0) \middle| \uparrow\otimes \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \downarrow\uparrow \middle| \hat{\mathsf{U}}(2\tau+T,\tau+T) \middle| \downarrow\uparrow \right\rangle \left\langle \downarrow\uparrow \middle| \hat{\mathsf{U}}_0'(T)\hat{\mathsf{U}}(\tau,0) \middle| \uparrow\otimes \right\rangle + \underbrace{\left\langle \downarrow\uparrow \middle| \hat{\mathsf{U}}(2\tau+T,\tau+T) \middle| \downarrow\downarrow \right\rangle}_{0} \left\langle \downarrow\downarrow \middle| \hat{\mathsf{U}}_0'(T)\hat{\mathsf{U}}(\tau,0) \middle| \uparrow\otimes \right\rangle \\ &= A_{\downarrow\uparrow}^{(2)} A_{\uparrow\uparrow}'^{\uparrow(1)} + A_{\downarrow\downarrow}^{(2)} A_{\downarrow\uparrow}'^{\uparrow(1)}, \end{aligned} \tag{12.1.25a}$$

$$A_{\downarrow\uparrow}'^{\downarrow} = A_{\downarrow\uparrow}^{(2)} A_{\uparrow\uparrow}'^{\downarrow(1)} + A_{\downarrow\downarrow}^{(2)} A_{\downarrow\uparrow}'^{\downarrow(1)}, \tag{12.1.25b}$$

kde vyznačené elementy jsou nulové díky ortogonalitě a díky tomu, že operátor $\hat{\mathsf{U}}$ nemění stav měřícího spinu, a $A_{\downarrow\uparrow}^{(2)}, A_{\downarrow\downarrow}^{(2)}$ jsou dány vztahy (10.2.21).
Využití vztahů (10.2.20) pro Ramseyův přístroj v první Ramseyově oblasti vede k amplitudám

$$\begin{aligned} A_{\uparrow\uparrow}'^{\uparrow(1)} &= \left[\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\right] \mathsf{U}_0'(T)\mathsf{U}(\tau;0) \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes |\phi_i\rangle\right] \\ &= \left[\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} & 0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} - (1-\mathrm{i})\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} & 0\end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\right] \mathsf{U}(\tau;0) \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\\1+\mathrm{i}\end{pmatrix}\right] \\ &= \left[\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega_0 T}{2}} & 0\end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i}\end{pmatrix}\right] \mathsf{U}(\tau;0) \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\\1+\mathrm{i}\end{pmatrix}\right] \\ &= A_{\uparrow\uparrow}^{(1)} \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i}\end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\\1+\mathrm{i}\end{pmatrix} \\ &= A_{\uparrow\uparrow}^{(1)}, \end{aligned} \tag{12.1.26a}$$

$$\begin{aligned} A_{\downarrow\uparrow}'^{\uparrow(1)} &= \left[\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\right] \mathsf{U}_0'(T)\mathsf{U}(\tau;0) \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes |\phi_i\rangle\right] \\ &= A_{\downarrow\uparrow}^{(1)} \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i}\end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\\1+\mathrm{i}\end{pmatrix} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{12.1.26b}$$

$$A_{\uparrow\uparrow}'^{\downarrow(1)} = 0, \tag{12.1.26c}$$

$$A_{\downarrow\uparrow}'^{\downarrow(1)} = A_{\downarrow\uparrow}^{(1)}, \tag{12.1.26d}$$

takže

$$A'^{\uparrow}_{\downarrow\uparrow} = A^{(2)}_{\downarrow\uparrow} A^{(1)}_{\uparrow\uparrow} = A_{\downarrow\uparrow\uparrow}, \tag{12.1.27a}$$

$$A'^{\downarrow}_{\downarrow\uparrow} = A^{(2)}_{\downarrow\downarrow} A^{(1)}_{\downarrow\uparrow} = A_{\downarrow\downarrow\uparrow}. \tag{12.1.27b}$$

Hledaná pravděpodobnost překlopení spinu je tedy podle (12.1.24)

$$p_{\downarrow\uparrow} = \left|A_{\downarrow\uparrow\uparrow}\right|^2 + \left|A_{\downarrow\downarrow\uparrow}\right|^2 . \tag{12.1.28}$$

Začlenění měřícího přístroje tedy zničí interferenci. Vývoj je však unitární, kvantová informace se přenese na měřící spin. Měřící spin se bude nacházet ve stavu $|\uparrow\rangle$, pokud se spin procházející přístrojem nachází za 1. Ramseyovou oblastí ve stavu $|\uparrow\rangle$, a obdobně pro spin mířící dolů.

Výpočet se dá provést i jinak. Jelikož stav měřícího spinu ovlivňuje pouze oblast bez oscilujícího magnetického pole $\boldsymbol{B}_1$, stačí určit

$$\begin{aligned}
\mathsf{U}'_0(T)\,[1 \otimes |\phi_i\rangle] &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega_0 T}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega_0 T}{2}} \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} (1-i)\, e^{i\frac{\omega_0 T}{2}} & 0 \\ 0 & (1+i)\, e^{-i\frac{\omega_0 T}{2}} \end{pmatrix} \otimes \underbrace{\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}\right]}_{\frac{i}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega_0 T}{2}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega_0 T}{2}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (i+1)\, e^{i\frac{\omega_0 T}{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & (i-1)\, e^{-i\frac{\omega_0 T}{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega_0 T}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega_0 T}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega_0 T}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega_0 T}{2}} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Z tohoto výrazu již vyplývají výše uvedené výsledky.

Poznámka: Formálně jednodušší přístup je pomocí matice hustoty. Pokud se použije Ramseyův přístroj bez měřícího zařízení, vyvine se spin z počátečního stavu (10.2.6) do stavu

$$|\psi_F\rangle = |\psi_i(T_F)\rangle = \left(A_{\uparrow\uparrow\uparrow} + A_{\uparrow\downarrow\uparrow}\right)|\uparrow\rangle + \left(A_{\downarrow\uparrow\uparrow} + A_{\downarrow\downarrow\uparrow}\right)|\downarrow\rangle , \tag{12.1.29}$$

kde $T_f \equiv 2\tau + T$, takže matice hustoty bude

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_i(T_f) &= \left|\psi_i(T_f)\right\rangle \left\langle \psi_i(T_f)\right| \\
&= \begin{pmatrix} \left|A_{\uparrow\uparrow\uparrow} + A_{\uparrow\downarrow\uparrow}\right|^2 & \left(A_{\uparrow\uparrow\uparrow} + A_{\uparrow\downarrow\uparrow}\right)\left(A_{\downarrow\uparrow\uparrow} + A_{\downarrow\downarrow\uparrow}\right)^* \\ \left(A_{\uparrow\uparrow\uparrow} + A_{\uparrow\downarrow\uparrow}\right)^* \left(A_{\downarrow\uparrow\uparrow} + A_{\downarrow\downarrow\uparrow}\right) & \left|A_{\downarrow\uparrow\uparrow} + A_{\downarrow\downarrow\uparrow}\right|^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{12.1.30}$$

a pravděpodobnost naměření stavu $\left|\psi_f\right\rangle$ (10.2.7) je

$$p_{\downarrow\uparrow} = \left\langle\psi_f\middle|\hat{\rho}_i(T_f)\middle|\psi_f\right\rangle = \left|A_{\downarrow\uparrow\uparrow} + A_{\downarrow\downarrow\uparrow}\right|^2 , \tag{12.1.31}$$

což je výsledek (10.2.23).

Při zapnutém měřícím přístroji je koncový stav

$$\begin{aligned}
\left|\psi_i(T_f)\right\rangle =& A_{\uparrow\uparrow\uparrow}\,|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + A_{\uparrow\downarrow\uparrow}\,|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \\
&+ A_{\downarrow\uparrow\uparrow}\,|\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + A_{\downarrow\downarrow\uparrow}\,|\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle .
\end{aligned} \tag{12.1.32}$$

Matice hustoty se zapnutým měřícím přístrojem má tedy složky

$$\rho'_{ab,cd}(T_f) = A_{ab\uparrow} A^*_{cd\uparrow}, \tag{12.1.33}$$

kde první index $a, c \in \{\uparrow, \downarrow\}$ odpovídá stavu spinu, druhý index $b, d \in \{\uparrow, \downarrow\}$ měřícímu přístroji.

V koncovém stavu nás nezajímá stav měřícího přístroje, což formálně znamená, že všechnu informaci nese parciální stopa matice hustoty přes $\mathcal{H}_m$:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}'_s(T_F) &= \mathrm{Tr}_m\, \hat{\rho}'(T_F) \\
&= \langle \uparrow_m | \hat{\rho}'(T_F) | \uparrow_m \rangle + \langle \downarrow_m | \hat{\rho}'(T_F) | \downarrow_m \rangle \\
&= \begin{pmatrix} \rho'_{\uparrow\uparrow,\uparrow\uparrow}(T_F) + \rho'_{\uparrow\downarrow,\uparrow\downarrow}(T_F) & \rho'_{\uparrow\uparrow,\downarrow\uparrow}(T_F) + \rho'_{\uparrow\downarrow,\downarrow\downarrow}(T_F) \\ \rho'_{\downarrow\uparrow,\uparrow\uparrow}(T_F) + \rho'_{\downarrow\downarrow,\uparrow\downarrow}(T_F) & \rho'_{\downarrow\uparrow,\downarrow\uparrow}(T_F) + \rho'_{\downarrow\downarrow,\downarrow\downarrow}(T_F) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left|A_{\uparrow\uparrow\uparrow}\right|^2 + \left|A_{\uparrow\downarrow\uparrow}\right|^2 & A_{\uparrow\uparrow\uparrow} A^*_{\downarrow\uparrow\uparrow} + A_{\uparrow\downarrow\uparrow} A^*_{\downarrow\downarrow\uparrow} \\ A_{\downarrow\uparrow\uparrow} A^*_{\uparrow\uparrow\uparrow} + A_{\downarrow\downarrow\uparrow} A^*_{\uparrow\downarrow\uparrow} & \left|A_{\downarrow\uparrow\uparrow}\right|^2 + \left|A_{\downarrow\downarrow\uparrow}\right|^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{12.1.34}$$

Hledaná pravděpodobnost je pak

$$p'_{\downarrow\uparrow} = \left\langle \downarrow_s \middle| \rho'_s(T_F) \middle| \downarrow_s \right\rangle = \left|A_{\downarrow\uparrow\uparrow}\right|^2 + \left|A_{\downarrow\downarrow\uparrow}\right|^2, \tag{12.1.35}$$

v souladu s (12.1.28).