

2 Spektrum operátorů, Pauliho matice, spin

Pauliho matice

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.0.1)$$

jsou unitární, hermitovské a unimodulární matice s nulovou stopou,

$$\sigma_j = \sigma_j^\dagger = \sigma_j^{-1}, \quad (2.0.2a)$$

$$\det \sigma_j = -1, \quad (2.0.2b)$$

$$\text{Tr} \sigma_j = 0, \quad (2.0.2c)$$

které splňují komutační relace

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon_{jkl}\sigma_l. \quad (2.0.3)$$

Z rovností (2.0.2) vyplývá, že všechny Pauliho matice mají dvě vlastní hodnoty $\lambda_\pm = \pm 1$. Příslušné vlastní vektory se běžně značí

$$|x-\rangle \equiv |\leftarrow\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |x+\rangle \equiv |\rightarrow\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.0.4a)$$

$$|y-\rangle \equiv |\odot\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad |y+\rangle \equiv |\otimes\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (2.0.4b)$$

$$|z-\rangle \equiv |\downarrow\rangle \equiv |-\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |z+\rangle \equiv |\uparrow\rangle \equiv |+\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.0.4c)$$

(první sloupec odpovídá záporným vlastním hodnotám $\lambda_- = -1$, druhý sloupec záporným vlastním hodnotám $\lambda_+ = +1$; j -tý řádek odpovídá matici σ_j).

Operátor spinu $\frac{1}{2}$

Operátor spinu $\frac{1}{2}$ (qbitu) se vyjadřuje pomocí Pauliho matic

$$\hat{S}_j = \frac{\hbar}{2}\sigma_j. \quad (2.0.5)$$

Tento operátor splňuje díky vztahu (2.0.3) komutační relace pro moment hybnosti

$$[\hat{S}_j, \hat{S}_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}\hat{S}_l. \quad (2.0.6)$$

Jeho vlastní hodnoty jsou $s_\pm = \pm\hbar/2$. Vlastní vektory operátorů \hat{S}_1 , \hat{S}_2 či \hat{S}_3 odpovídají spinovému (dvouhladinovému) systému polarizovanému podél osy x , y či z (více v příkladu 2.3).

Kvaterniony

Pauliho matice úzce souvisejí s kvaterniony $q = ai + bj + ck + d \in \mathbb{H}$: imaginární jednotky i, j, k kvaternionů splňující

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad (2.0.7a)$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j \quad (2.0.7b)$$

lze namapovat na Pauliho matice vztahy

$$i \leftrightarrow -i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad j \leftrightarrow -i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k \leftrightarrow -i\sigma_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (2.0.8)$$

Kvaternion se pak dá zapsat jako komplexní matice

$$q = \begin{pmatrix} d - ic & -b - ia \\ b - ia & d + ic \end{pmatrix}. \quad (2.0.9)$$

Algebru kvaternionů lze tedy převést na algebru komplexních matic 2×2 , což souvisí s isomorfismem Lieových algeber $u(1, \mathbb{H}) \simeq su(2, \mathbb{C})$.

2.1 Spin mířící do obecného směru

Na jednotkové kouli (tzv. *Blochově sféře*) je zadán jednotkový vektor

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad |\mathbf{n}| = 1, \theta \in [0, \pi), \phi \in [0, 2\pi) \quad (2.1.1)$$

mířící do obecného směru daného sférickými úhly (θ, ϕ) .

1. V souřadnicích (n_1, n_2, n_3) a (θ, ϕ) vyjádřete matici $\sigma_{\mathbf{n}} \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, kde $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ je tzv. *Pauliho vektor*.
2. Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice $\sigma_{\mathbf{n}}$.
3. Napište maticové vyjádření projektorů $\hat{P}_{\mathbf{n}\pm}$ na podprostory odpovídající vlastním hodnotám $\sigma_{\mathbf{n}\pm}$ matice $\sigma_{\mathbf{n}}$ a ověřte, že se skutečně jedná o projektory.
4. Dokažte, že platí

$$\boxed{P_{\mathbf{n}\pm} = \frac{1}{2} (1 \pm \sigma_{\mathbf{n}})}. \quad (2.1.2)$$

Řešení:

1. Spinová matice vyjádřená v kartézských souřadnicích:

$$\sigma_{\mathbf{n}} = n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_2 + n_3 \sigma_3 = \begin{pmatrix} n_3 & n_1 - in_2 \\ n_1 + in_2 & -n_3 \end{pmatrix} \quad (2.1.3)$$

a ve sférických souřadnicích:

$$\sigma_{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.1.4)$$

2. Vlastní hodnoty spinové matice získané diagonalizací:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{n}} |\mathbf{n}\pm\rangle &= \sigma_{\mathbf{n}\pm} |\mathbf{n}\pm\rangle \\ \det \begin{pmatrix} \cos \theta - \sigma_{\mathbf{n}\pm} & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta - \sigma_{\mathbf{n}\pm} \end{pmatrix} &= 0 \\ -(\cos \theta - \sigma_{\mathbf{n}\pm})(\cos \theta + \sigma_{\mathbf{n}\pm}) - \sin^2 \theta &= 0 \\ \sigma_{\mathbf{n}\pm}^2 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta &= 0 \\ \sigma_{\mathbf{n}\pm} &= \pm 1. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Vlastní vektor příslušející $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ x e^{i\phi} \sin \theta &= y (\cos \theta + 1) \\ x &= y \frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta} e^{-i\phi} \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

a jeho normalizace

$$\begin{aligned}
 1 &= xx^* + yy^* \\
 &= |y|^2 \left[\frac{\cos^2 \theta + 2 \cos \theta + 1}{\sin^2 \theta} + 1 \right] \\
 &= |y|^2 \frac{2 \cos \theta + 2}{(1 - \cos^2 \theta)} \\
 &= |y|^2 \frac{2}{1 - \cos \theta} = \\
 &= |y|^2 \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}. \tag{2.1.7}
 \end{aligned}$$

Fázi lze volit libovolně. Konkrétní volba s reálnou y -ovou složkou odpovídá

$$y = \sin \frac{\theta}{2}, \tag{2.1.8a}$$

$$x = \sin \frac{\theta}{2} \cotg \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} = e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2}, \tag{2.1.8b}$$

takže vlastní vektor odpovídající vlastní hodnotě $\lambda = 1$ je

$$|n+\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{2.1.9}$$

Obdobně se získá i vlastní vektor k vlastní hodnotě $\lambda = -1$:

$$|n-\rangle = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{2.1.10}$$

3. Z definice projektoru plyne po dosazení vlastních vektorů

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_{n+} &\equiv |n+\rangle \langle n+| \\
 &= \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} & \\ & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \tag{2.1.11}
 \end{aligned}$$

$$\hat{P}_{n-} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & 1 + \cos \theta \end{pmatrix} \tag{2.1.12}$$

Skutečnost, že se jedná o projektory, se dokáže ze [vztahu úplnosti](#)

$$\hat{P}_{n+} + \hat{P}_{n-} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 \tag{2.1.13}$$

a z vlastnosti [kvadrátu projektoru](#)

$$\hat{P}_{n+}^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} = \hat{P}_{n+}, \tag{2.1.14a}$$

$$\hat{P}_{n-}^2 = \hat{P}_{n-}. \tag{2.1.14b}$$

4. Vztah (2.1.2) mezi projektory a spinovou maticí vyplývá z porovnání projektorů (2.1.11) a (2.1.12) s explicitním vyjádřením matice (2.1.4).

2.2 Exponenciála Pauliho vektoru

Dokažte, že

$$e^{i\alpha(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})} = 1 \cos \alpha + i (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \sin \alpha, \quad (2.2.1)$$

kde α je reálný parametr.

Řešení:

Dokazovaný vztah (2.2.1) nabízí rozvést exponenciálu na levé straně do řady (1.0.3). V řadě se budou kromě číselných koeficientů vyskytovat celočíselné mocniny spinové matice $\sigma_{\mathbf{n}}^k = (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Druhá mocnina $k = 2$ je rovna jednotkové matici,

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 &= \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= 1, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

z čehož indukci vyplývá, že

$$(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^{2n} = 1, \quad (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^{2n+1} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}. \quad (2.2.3)$$

Rozvoj exponenciály se rozpadne na sudé a liché členy (podobně jako v příkladu 1.6), které se vysčítají na goniometrické funkce cosinus a sinus,

$$\begin{aligned} e^{i\alpha(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \alpha^k (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^k \\ &= 1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \alpha^{2k} + i (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \alpha^{2k+1} \\ &= 1 \cos \alpha + i (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Vztah (2.2.1) je tímto dokázán.

Poznámka: Důkaz lze provést i na základě vyjádření funkce operátoru pomocí spektrálního rozkladu (1.0.5). To je v obecnosti provedeno v následujícím příkladu 2.3.

2.3 Funkce Pauliho vektoru

Dokažte, že pro funkci definovanou v bodech $\pm\alpha$ platí

$$f(\alpha \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \frac{f(\alpha) + f(-\alpha)}{2} + \frac{f(\alpha) - f(-\alpha)}{2} \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}. \quad (2.3.1)$$

Poznámka: Pro $f \equiv \exp$ dostaneme výsledek z předchozího příkladu.

Řešení:

V příkladu 2.1 bylo ukázáno, že vlastní hodnoty operátoru $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ jsou ± 1 , z čehož vyplývá, že spektrální rozklad operátoru v argumentu funkce je

$$\alpha \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \alpha \hat{P}_{\mathbf{n}+} - \alpha \hat{P}_{\mathbf{n}-}, \quad (2.3.2)$$

kde $\hat{P}_{\mathbf{n}\pm}$ jsou projekční operátory na charakteristické podprostory příslušných vlastních hodnot $\sigma_{\mathbf{n}\pm} = \pm 1$. Podle definice funkce operátoru pomocí spektrálního rozkladu (1.0.5) platí

$$f(\alpha \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = f(\alpha) \hat{P}_{\mathbf{n}+} + f(-\alpha) \hat{P}_{\mathbf{n}-}. \quad (2.3.3)$$

Dosažení vyjádření projekčních operátorů pomocí spinové matice $\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ dané vztahem (2.1.2) vede na

$$\begin{aligned} f(\alpha \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) &= f(\alpha) \left(\frac{1}{2} + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) + f(-\alpha) \left(\frac{1}{2} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \\ &= \frac{f(\alpha) + f(-\alpha)}{2} + \frac{f(\alpha) - f(-\alpha)}{2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Tím je důkaz hotov.

2.4 Nekřížení hladin — dvouhladinový systém

Hamiltonián popisující dvouhladinový systém je zadán reálnou maticí

$$H_0 = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix} = e\sigma_3, \quad (2.4.1)$$

jejíž vlastní čísla jsou $\pm e \in \mathbb{R}$ a odpovídající normalizované vlastní vektory

$$|e_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4.2)$$

K matici H_0 je přidána interakce ve tvaru

$$H_I = \begin{pmatrix} 0 & v \\ v & 0 \end{pmatrix} = v\sigma_1, \quad (2.4.3)$$

kde $v, w \in \mathbb{R}$.

1. Spočítejte vlastní hodnoty E_+, E_- ($E_- \leq E_+$) a odpovídající *normalizované* vlastní vektory $|E_+\rangle, |E_-\rangle$ systému popsaného maticí $H = H_0 + H_I$.
2. Zakreslete závislost energetických hladin E_\pm na parametru v a určete vlastní vektory $|E_\pm(v)\rangle$ pro (a) $v = 0$, (b) $v \rightarrow \pm\infty$.
3. Zakreslete závislost energetických hladin E_\pm na parametru e a určete vlastní vektory $|E_\pm(e)\rangle$ pro (a) $e = 0$, (b) $e \rightarrow \pm\infty$. Uvažujte dva podpřípady: (a) $v = 0$ (křížení hladin) a (b) $v \neq 0$ (hladiny se nekříží).

Poznámka: Vzhledem ke tvaru Hamiltoniánu by závislosti $|E_\pm(v)\rangle$ a $|E_\pm(e)\rangle$ měly být hladké funkce.

Řešení:

1. Spektrum matice H se spočítá z charakteristické rovnice

$$\det \begin{pmatrix} e - E & v \\ v & -e - E \end{pmatrix} = (E - e)(E + e) - v^2 = 0, \quad (2.4.4)$$

jejíž řešení jsou

$$E_\pm = \pm \sqrt{e^2 + v^2}. \quad (2.4.5)$$

Odpovídající normalizované vlastní vektory lze vyjádřit ve tvaru

$$|E_-\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (2.4.6a)$$

$$|E_+\rangle = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}, \quad (2.4.6b)$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (2.4.6c)$$

kde

$$\alpha = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + (1 + \sqrt{\xi^2 + 1})^2}}, \quad \beta = \frac{1 + \sqrt{\xi^2 + 1}}{\sqrt{\xi^2 + (1 + \sqrt{\xi^2 + 1})^2}}, \quad \xi = \frac{v}{e}, \quad (2.4.7a)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + (\eta + \sqrt{1 + \eta^2})^2}}, \quad \beta = \frac{\eta + \sqrt{1 + \eta^2}}{\sqrt{1 + (\eta + \sqrt{1 + \eta^2})^2}}, \quad \eta = \frac{e}{v} \quad (2.4.7b)$$

(ξ a η jsou bezrozměrné parametry definované na základě zadaných parametrů v a e).³

2. Funkční závislost energetických hladin E_{\pm} je zcela identická jak pro parametr e (η), tak pro parametr v (ξ). Limitní hodnoty komponent vlastních vektorů jsou podle vztahu (2.4.7b)

$$\alpha(\xi \rightarrow \pm\infty) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha(\xi = 0) = 0, \quad (2.4.10a)$$

$$\beta(\xi \rightarrow \pm\infty) = + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta(\xi = 0) = 1 \quad (2.4.10b)$$

a jsou znázorněny na obrázku 1(a). Dynamika hladin a limitní tvar vlastních vektorů jsou znázorněny na obrázku 2(a). Vlastní vektory $|E_{-}\rangle$ a $|E_{+}\rangle$ se prohodí při přechodu ξ od $-\infty$ k $+\infty$, zatímco energetické hladiny se nepřekříží. Jeden z vektorů navíc získá dodatečnou fázi -1 .

3. Pro proměnnou vzdálenost počátečních hladin e a konstantní v platí podle vztahu (2.4.7a) za předpokladu $v \neq 0$

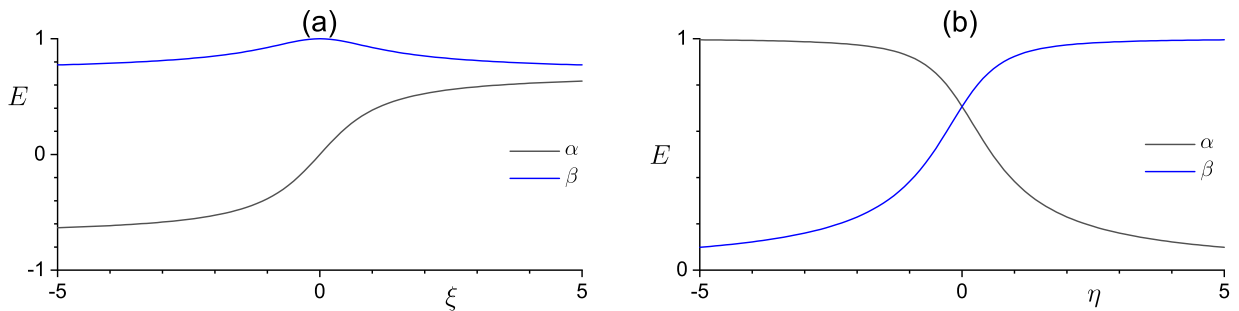
$$\alpha(\eta \rightarrow -\infty) = \beta(\eta \rightarrow +\infty) = 1, \quad (2.4.11a)$$

$$\alpha(\eta \rightarrow +\infty) = \beta(\eta \rightarrow -\infty) = -1, \quad (2.4.11b)$$

$$\alpha(\eta = 0) = \beta(\eta = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.4.11c)$$

[zakresleno v obrázku 1(b)]. Opět tedy dojde k výměně vlastních vektorů při přechodu od jedné limitní hodnoty k druhé a k objevení se dodatečné fáze -1 při nekřížení energetických hladin.

Pokud je naopak $v = 0$, hladiny se v bodě $e = \eta = 0$ protnou. Vše je znázorněno na obrázku 2(b).



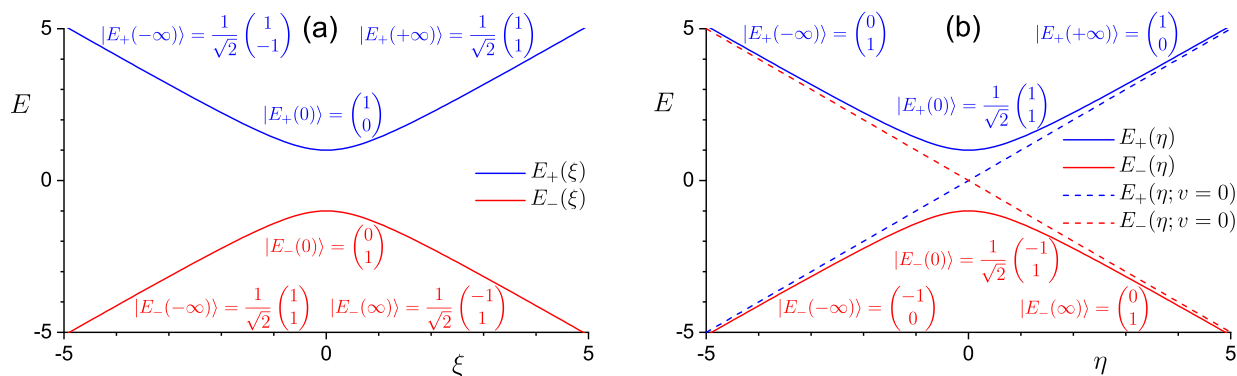
Obrázek 1: Dynamika komponent vlastních vektorů pro dvouhladinový systém (a) s proměnnou mimo-diagonální interakcí [rovnice (2.4.7a)], (b) s proměnnou vzdáleností neporušených hladin na diagonále [rovnice (2.4.7b)].

³Vlastní vektory lze také vyjádřit ve tvaru

$$|E_{-}\rangle = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \quad |E_{+}\rangle = \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \end{pmatrix}, \quad (2.4.8)$$

kde

$$\phi = \frac{1}{2} \arctan \frac{v}{e}. \quad (2.4.9)$$



Obrázek 2: Dynamika hladin pro dvouhladinový systém (a) s proměnnou mimodiagonální interakcí, (b) s proměnnou vzdáleností neporušených hladin na diagonále.

2.5 Kvantový oblak

1. Spočítejte vlastní hodnoty $E_{1,2,3}$ a vlastní vektory $|E_{1,2,3}\rangle$ systému popsaného Hamiltoniánem

$$H = H_0 + V, \quad \text{kde } H_0 = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & v & v \\ v & 0 & v \\ v & v & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5.1)$$

a načrtněte graf $E_{1,2,3}(v)$.

2. *Zobecnění předchozího případu:* Určete vlastní hodnoty a normalizované ortogonální vlastní vektory Hamiltoniánu H' obecné dimenze N ,

$$H = \begin{pmatrix} e & v & v & v & & \\ v & e & v & v & & \\ v & v & e & v & \dots & \\ v & v & v & e & & \\ & \vdots & & & \ddots & \end{pmatrix}. \quad (2.5.2)$$

Tento Hamiltonián popisuje například částici na mřížce o N pozicích, přičemž částice může přeskočit na libovolnou pozici mřížky a žádná pozice není upřednostněna.

2.6 Kvantový řetízek

Určete vlastní hodnoty a normalizované vlastní vektory Hamiltoniánu dimenze N ve tvaru tridiagonální matice

$$H = \begin{pmatrix} e & v & 0 & 0 & & \\ v & e & v & 0 & & \\ 0 & v & e & v & \dots & \\ 0 & 0 & v & e & & \\ & \vdots & & & \ddots & \end{pmatrix}. \quad (2.6.1)$$

Jak se bude měnit energetické spektrum s rostoucím N ?

Nápověda: V charakteristické rovnici identifikujte diferenční rovnici pro složky $c_k, k = 1, \dots, n$ vlastních vektorů a řešte ji pomocí násady $c_k = u^k$.

Poznámka: Tento Hamiltonián popisuje například částici na řetízku délky N , která smí „přeskočit“ jen na sousední pozice:

$$\hat{H} = e \sum_{k=1}^N |k\rangle \langle k| + v \sum_{n=1}^{N-1} (|k\rangle \langle k+1| + |k+1\rangle \langle k|), \quad (2.6.2)$$

kde $\{|k\rangle, k = 1, \dots, N\}$ je ortonormální báze. V případě, kdy N je velké, se jedná o jednoduchý model jednorozměrného krystalu.