

Domácí úkol – Jednoduché kvantové systémy

Kvantový řetízek

Určete vlastní hodnoty a normalizované vlastní vektory Hamiltoniánu dimenze N ve tvaru tridiagonální matice

$$H = \begin{pmatrix} e & v & 0 & 0 & & \\ v & e & v & 0 & & \\ 0 & v & e & v & \dots & \\ 0 & 0 & v & e & & \\ & & \vdots & & \ddots & \end{pmatrix}.$$

Jak se bude měnit energetické spektrum s rostoucím N ?

Nápověda: V charakteristické rovnici identifikujte diferenční rovnici pro složky $c_k, k = 1, \dots, n$ vlastních vektorů a řešte ji pomocí násady $c_k = u^k$.

Poznámka: Tento Hamiltonián popisuje například částici na řetízku délky N , která smí „přeskočit“ jen na sousední pozice:

$$\hat{H} = e \sum_{k=1}^N |k\rangle \langle k| + v \sum_{n=1}^{N-1} (|k\rangle \langle k+1| + |k+1\rangle \langle k|),$$

kde $\{|k\rangle, k = 1, \dots, N\}$ je ortonormální báze. V případě, kdy N je velké, se jedná o jednoduchý model jednorozměrného krystalu.

Kvantový oblak

Určete vlastní hodnoty a normalizované ortogonální vlastní vektory Hamiltoniánu dimenze N daného maticí

$$H = \begin{pmatrix} e & v & v & v & & \\ v & e & v & v & & \\ v & v & e & v & \dots & \\ v & v & v & e & & \\ & & \vdots & & \ddots & \end{pmatrix}.$$

Tento Hamiltonián popisuje například částici na mřížce o N pozicích, přičemž částice může přeskočit na libovolnou pozici mřížky a žádná pozice není upřednostněna.