4 Harmonický oscilátor

4.1 Spektrum operátoru $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$

Je zadán operátor $\hat{a}$ a operátor $\hat{a}^\dagger$ k němu sdružený, které mezi sebou splňují komutační relace[9][10]

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1. \tag{4.1.2}$$

Definujme operátor

$$\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}. \tag{4.1.3}$$

1. Ukažte, že operátor $\hat{n}$ je samosdružený a pozitivně definitní.
2. Nalezněte, čemu se rovnají komutátory $\left[\hat{n}, \hat{a}^k\right]$ a $\left[\hat{n}, \left(\hat{a}^\dagger\right)^k\right]$ pro $k \in \mathbb{N}$.
3. Ukažte, čemu se rovná $\hat{a}^\dagger |n\rangle$, $\hat{a} |n\rangle$, kde $|n\rangle$ je vlastní vektor operátoru $\hat{n}$ příslušející vlastní hodnotě n.
4. Nalezněte všechny vlastní hodnoty n operátoru $\hat{n}$.
5. Nalezněte normalizované vlastní vektory operátoru $\hat{n}$.
6. Nalezněte tvar operátorů $\hat{a}$ a $\hat{a}^\dagger$ v maticové realizaci.

Řešení:

1. Samosdruženost plyne z identit

$$\hat{n}^\dagger = \left(\hat{a}^\dagger \hat{a}\right)^\dagger = \hat{a}^\dagger \left(\hat{a}^\dagger\right)^\dagger = \hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{n}. \tag{4.1.4}$$

Díky samosdruženosti existuje spektrální rozklad operátoru $\hat{n}$,

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle, \tag{4.1.5}$$

kde n je reálné číslo a $|n\rangle$ odpovídající normalizovaný vlastní vektor, $\langle n|n\rangle = 1$.
Pozitivita operátoru $\hat{n}$ znamená, že všechny jeho vlastní hodnoty jsou nezáporné. Platí

$$\langle n|\hat{n}|n\rangle = n \langle n|n\rangle = n \tag{4.1.6}$$

a zároveň

$$\langle n|\hat{n}|n\rangle = \left\langle n\middle|\hat{a}^\dagger \hat{a}\middle|n\right\rangle = \left|\hat{a} |n\rangle\right|^2 \geq 0, \tag{4.1.7}$$

takže opravdu

$$n \geq 0. \tag{4.1.8}$$

2. Pro $k = 1$ je

$$[\hat{n}, \hat{a}] = \left[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}\right] = \hat{a}^\dagger \underbrace{[\hat{a}, \hat{a}]}_{0} + \underbrace{\left[\hat{a}^\dagger, \hat{a}\right]}_{-1} \hat{a} = -\hat{a}, \tag{4.1.9}$$

[9] Vztahu (4.1.2) je třeba rozumět ve smyslu $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = \hat{1}$, kde $\hat{1}$ je operátor identity, podobně jako je tomu například u komutačních relací samosdružených operátorů souřadnice a hybnosti $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\hat{1}$, které se běžně zkráceně zapisují $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.

[10] Obecněji lze uvažovat komutační relace

$$\left[\hat{A}, \hat{A}^\dagger\right] = m, \qquad m \in \mathbb{R}^+. \tag{4.1.1}$$

Ty přejdou na (4.1.2) přeškálováním $\hat{a} = \hat{A}/\sqrt{m}$.

kde druhá rovnost platí díky rozvoji komutátoru (1.1.1a) a poslední rovnost vyplývá ze vztahu (4.1.2). Induktivní opakování tohoto postupu vede na

$$\begin{aligned}\left[\hat{n}, \hat{a}^k\right] &= \left[\hat{n}, \hat{a}^{k-1}\hat{a}\right] = \hat{a}^{k-1}\underbrace{[\hat{n}, \hat{a}]}_{-\hat{a}} + \left[\hat{n}, \hat{a}^{k-1}\right]\hat{a} \\ &= -\hat{a}^k + \left[\hat{n}, \hat{a}^{k-2}\hat{a}\right]\hat{a} = -\hat{a}^k + \hat{a}^{k-2}\underbrace{[\hat{n}, \hat{a}]}_{-\hat{a}}\hat{a} + \left[\hat{n}, \hat{a}^{k-2}\right]\hat{a}^2 \\ &= -2\hat{a}^k + \left[\hat{n}, \hat{a}^{k-3}\hat{a}\right]\hat{a}^2 = \cdots = -k\hat{a}^k. \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Zcela analogicky se ukáže, že

$$\left[\hat{n}, \left(\hat{a}^\dagger\right)^k\right] = k\left(\hat{a}^\dagger\right)^k. \tag{4.1.11}$$

3. Vlastní hodnoty a vlastní vektory operátoru $\hat{n}$ splňují rovnici (4.1.5), kde $n \geq 0$. Za předpokladu $n \neq 0$ a díky vztahu (4.1.9) platí

$$\hat{n}\hat{a}\left|n\right\rangle = \left(\hat{a}\hat{n} - \hat{a}\hat{n} + \hat{n}\hat{a}\right)\left|n\right\rangle = \left(\hat{a}\hat{n} + [\hat{n}, \hat{a}]\right)\left|n\right\rangle = \left(\hat{a}\hat{n} - \hat{a}\right)\left|n\right\rangle = (n-1)\,\hat{a}\left|n\right\rangle. \tag{4.1.12}$$

Analogicky pak

$$\hat{n}\hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle = (n+1)\,\hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle. \tag{4.1.13}$$

Vektory $\hat{a}\left|n\right\rangle$ a $\hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle$ jsou tedy oba vlastními stavy operátoru $\hat{n}$ příslušejícími vlastním hodnotám $n-1$, respektive $n+1$. Norma těchto vektorů je

$$\left|\left\langle n\middle|\hat{a}^\dagger\hat{a}\middle|n\right\rangle\right| = \left|\left\langle n\middle|\hat{n}\middle|n\right\rangle\right| = n\left|\left\langle n|n\right\rangle\right| = n, \tag{4.1.14a}$$

$$\left|\left\langle n\middle|\hat{a}\hat{a}^\dagger\middle|n\right\rangle\right| = \left|\left\langle n\middle|\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1\middle|n\right\rangle\right| = n+1. \tag{4.1.14b}$$

Normované vlastní vektory operátoru $\hat{n}$ jsou tedy navzájem svázány operátory $\hat{a}$ a $\hat{a}^\dagger$:

$$\boxed{\begin{aligned}\left|n-1\right\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{n}}\,\hat{a}\left|n\right\rangle, & (4.1.15a)\\ \left|n+1\right\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,\hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle. & (4.1.15b)\end{aligned}}$$

4. k-násobným opakovaným působení operátoru $\hat{a}$ na stav $\left|n\right\rangle$ se dospěje k normovanému vektoru

$$\left|n-k\right\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n(n-1)\cdots(n-k)}}\,\hat{a}^k\left|n\right\rangle, \tag{4.1.16}$$

což je vlastní vektor operátoru $\hat{n}$ příslušející vlastní hodnotě $n-k$. Pozitivita operátoru však omezuje hodnoty k: Pro žádné k není povoleno získat vektor, který by měl odpovídat záporné vlastní hodnotě. Jelikož k lze volit libovolně, musí spektrum operátoru bezpodmínečně obsahovat hodnotu 0, tj. musí existovat vektor $\left|0\right\rangle$ takový, že

$$\hat{n}\left|0\right\rangle = 0\left|0\right\rangle = 0, \tag{4.1.17}$$

a tedy $\hat{a}\left|0\right\rangle = 0$. Další aplikace operátoru $\hat{a}$ dají identicky nulu.
Spektrum operátoru $\hat{n}$ tedy tvoří všechna nezáporná celá čísla $n \in \mathbb{N}_0$.

5. Všechny normalizované vlastní vektory $\left|n\right\rangle$ lze nagenerovat ze stavu $\left|0\right\rangle$ pomocí vícenásobného použití operátoru $\hat{a}^\dagger$ podle (4.1.15):

$$\boxed{\left|n\right\rangle = \frac{\left(\hat{a}^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}}\left|0\right\rangle.} \tag{4.1.18}$$

6. Dimenze Hilbertova prostoru, na kterém působí operátory $\hat{a}$ a $\hat{a}^\dagger$, je nekonečná, přičemž za jeho bázi lze zvolit vektory $\left|n\right\rangle$. V maticové realizaci lze tento vektor vyjádřit jako nekonečný sloupec

$$\left|n\right\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \cdots\ n\text{-tá pozice} \tag{4.1.19}$$

Z algebraického vztahu mezi bázovými vektory (4.1.15) vyplývá

$$\mathsf{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{a}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & \\ & & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \equiv \mathsf{a}^\mathsf{T}. \tag{4.1.20}$$

Operátor $\hat{\mathsf{n}}$ je v této bázi diagonální a jeho maticové vyjádření je

$$\mathsf{n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \\ & & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}. \tag{4.1.21}$$

K tomuto vztahu lze rovněž dospět pronásobením nekonečných matic (4.1.20), tj. $\mathsf{n} = \mathsf{a}^\dagger \mathsf{a}$.

Poznámka: Operátory $\hat{\mathsf{a}}$, $\hat{\mathsf{a}}^\dagger$ posouvají vlastní stav operátoru $\hat{\mathsf{n}}$ z vyšší vlastní hodnoty na nižší a naopak, proto se obvykle nazývají *posunovací operátory*. Při využití těchto operátorů nad Fokovými prostory (kapitola 17), kde vytvářejí a ruší částice daných vlastností, se nazývají *anihilační a kreační operátory*.

4.2 Jednorozměrný harmonický oscilátor

Harmonický oscilátor je popsán Hamiltoniánem

$$\boxed{\hat{\mathsf{H}} = \frac{1}{2M}\hat{\mathsf{p}}^2 + \frac{1}{2}M\Omega^2\hat{\mathsf{x}}^2,} \tag{4.2.1}$$

kde M je hmotnost kmitající částice, $\Omega = \sqrt{k/M}$ je úhlová frekvence oscilátoru, $\hat{\mathsf{x}}$ je operátor souřadnice a $\hat{\mathsf{p}}$ operátor k němu přidružené hybnosti. Oba tyto samosdružené operátory splňují kanonický komutační vztah

$$[\hat{\mathsf{x}}, \hat{\mathsf{p}}] = \mathrm{i}\hbar. \tag{4.2.2}$$

V harmonickém oscilátoru lze vhodně nadefinovat operátory $\hat{\mathsf{a}}$, $\hat{\mathsf{a}}^\dagger$, a tím ho převést na algebraický systém, který jsme vyřešili v předchozím příkladu 4.1. Hledejte $\hat{\mathsf{a}}$ ve tvaru

$$\hat{\mathsf{a}} = \alpha\hat{\mathsf{x}} + \beta\hat{\mathsf{p}}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{4.2.3}$$

1. Nalezněte hodnoty konstant α, β a zapište Hamiltonián $\hat{\mathsf{H}}$ pomocí operátorů $\hat{\mathsf{a}}$, $\hat{\mathsf{a}}^\dagger$.

2. Nalezněte spektrum (vlastní energie a vlastní vektory) Hamiltoniánu.

3. Vyjádřete operátory hybnosti $\hat{\mathsf{p}}$ a souřadnice $\hat{\mathsf{x}}$ pomocí operátorů $\hat{\mathsf{a}}$, $\hat{\mathsf{a}}^\dagger$.

4. Spočítejte střední hodnoty

$$\langle n|\hat{\mathsf{x}}|n\rangle\,, \quad \langle n|\hat{\mathsf{p}}|n\rangle\,, \quad \left\langle n|\hat{\mathsf{x}}^2|n\right\rangle\,, \quad \left\langle n|\hat{\mathsf{p}}^2|n\right\rangle\,, \tag{4.2.4}$$

   kde $|n\rangle$ je vlastní stav Hamiltoniánu.

5. Spočítejte střední hodnoty

$$\left\langle n\middle|\hat{\mathsf{T}}\middle|n\right\rangle, \qquad \left\langle n\middle|\hat{\mathsf{V}}\middle|n\right\rangle, \tag{4.2.5}$$

   kde $\hat{\mathsf{T}}$ a $\hat{\mathsf{V}}$ jsou operátory kinetické, resp. potenciální energie oscilátoru, a srovnejte s hodnotou energie ve stavu $|n\rangle$ (viriálový teorém).

6. Ověřte platnost relací neurčitosti mezi polohou a hybností.

7. Pomocí posunovacích operátorů vyjádřených v x-reprezentaci nalezněte vlnové funkce Harmonického oscilátoru.

Řešení:

1. Dosazení lineární kombinace souřadnic a hybností (4.2.3) do definice operátoru $\hat{n}$ dá

$$\begin{aligned}\hat{n} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a} &= (\alpha^*\hat{x} + \beta^*\hat{p})(\alpha\hat{x} + \beta\hat{p}) \\ &= |\alpha|^2 \hat{x}^2 + \alpha^*\beta \underbrace{\hat{x}\hat{p}}_{\hat{p}\hat{x}+i\hbar} + \alpha\beta^*\hat{p}\hat{x} + |\beta|^2 \hat{p}^2 \\ &= |\alpha|^2 \hat{x}^2 + (\alpha^*\beta + \alpha\beta^*)\hat{p}\hat{x} + i\hbar\alpha^*\beta + |\beta|^2 \hat{p}^2.\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Srovnáním tohoto výrazu s Hamiltoniánem (4.2.1) je patrné, že až na konstantní člen lze Hamiltonián harmonického oscilátoru zkonstruovat z operátoru $\hat{n}$, pokud vymizí členy mísící souřadnici a hybnost, tj. pokud

$$\alpha^*\beta + \alpha\beta^* = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Re}\,\alpha^*\beta = 0. \tag{4.2.7}$$

Bez újmy na obecnosti lze zvolit α reálné a β ryze imaginární. Pak

$$\hat{H} = \gamma\hat{n} + \delta, \tag{4.2.8}$$

kde γ a δ jsou již reálná čísla.
Dodatečná podmínka plyne z komutačních relací (4.1.2),

$$\begin{aligned}1 = \left[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}\right] &= (\alpha\hat{x} + \beta\hat{p})(\alpha^*\hat{x} + \beta^*\hat{p}) - (\alpha^*\hat{x} + \beta^*\hat{p})(\alpha\hat{x} + \beta\hat{p}) \\ &= (\alpha\beta^* - \alpha^*\beta) \underbrace{\hat{x}\hat{p}}_{\hat{p}\hat{x}+i\hbar} + (\alpha^*\beta - \alpha\beta^*)\hat{p}\hat{x} \\ &= (\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)\, i\hbar \\ &= 2\alpha\beta^* i\hbar,\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

takže musí platit

$$\alpha\beta^* = \frac{1}{2i\hbar}. \tag{4.2.10}$$

Srovnáním příslušných členů výrazu (4.2.6) s Hamiltoniánem (4.2.1) a díky podmínce (4.2.10) lze přiřadit parametrům hodnoty

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{\frac{1}{2}M\Omega^2}, \tag{4.2.11a}$$

$$\beta = \frac{i}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{\frac{1}{2M}}, \tag{4.2.11b}$$

$$\gamma = \hbar\Omega, \tag{4.2.11c}$$

$$\delta = \frac{\gamma}{2} = \frac{\hbar\Omega}{2}. \tag{4.2.11d}$$

Výsledkem je vyjádření Hamiltoniánu harmonického oscilátoru ve tvaru

$$\boxed{\hat{H} = \hbar\Omega\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \frac{1}{2}\right)}. \tag{4.2.12}$$

2. Spektrum Hamiltoniánu lze určit na základě znalosti spektra operátoru $\hat{n}$ (4.1.18):

$$\begin{aligned}\hat{H}\,|E_n\rangle &= E_n\,|E_n\rangle \\ \hbar\Omega\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\,|E_n\rangle + \frac{1}{2}\,|E_n\rangle\right) &= E_n\,|E_n\rangle \\ \hbar\Omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle &= E_n\,|n\rangle\,,\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

takže

$$\boxed{E_n = \hbar\Omega\left(n+\frac{1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0} \tag{4.2.14}$$

a vlastní vektory jsou totožné s vlastními vektory operátoru $\hat{\mathsf{n}}$, $|E_n\rangle \equiv |n\rangle$.

3. Dosazení α, β a γ z (4.2.11) do (4.2.3), vede na vztahy[11]

$$\hat{\mathsf{a}} = \frac{\hat{\mathsf{A}}}{\sqrt{\hbar\Omega}} = \frac{1}{\sqrt{\hbar\Omega}}\left(\sqrt{\frac{1}{2}M\Omega^2}\hat{\mathsf{x}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2M}}\hat{\mathsf{p}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{M\Omega}{2\hbar}}\left(\hat{\mathsf{x}} + \frac{\mathrm{i}}{M\Omega}\hat{\mathsf{p}}\right), \tag{4.2.17a}$$

$$\hat{\mathsf{a}}^\dagger = \sqrt{\frac{M\Omega}{2\hbar}}\left(\hat{\mathsf{x}} - \frac{\mathrm{i}}{M\Omega}\hat{\mathsf{p}}\right). \tag{4.2.17b}$$

Sečtení a odečtení vede k inverzní transformaci od posunovacích operátorů k operátorům souřadnice a hybnosti,

$$\hat{\mathsf{x}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}}\left(\hat{\mathsf{a}}^\dagger + \hat{\mathsf{a}}\right), \tag{4.2.18a}$$

$$\hat{\mathsf{p}} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar M\Omega}{2}}\left(\hat{\mathsf{a}}^\dagger - \hat{\mathsf{a}}\right). \tag{4.2.18b}$$

4. K výpočtu středních hodnot operátorů $\hat{\mathsf{x}}$, $\hat{\mathsf{p}}$ se využije jejich vyjádření pomocí posunovacích operátorů (4.2.18) a poté vztahy (4.1.15):

$$\langle n|\hat{\mathsf{x}}|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}}\left\langle n\middle|\hat{\mathsf{a}}^\dagger + \hat{\mathsf{a}}\middle|n\right\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}}\left(\sqrt{n+1}\,\langle n|n+1\rangle + \sqrt{n}\,\langle n|n-1\rangle\right)$$

$$= 0, \tag{4.2.19}$$

jelikož vlastní vektory $|n-1\rangle$, $|n\rangle$ a $|n+1\rangle$ jsou na sebe kolmé. Stejně tak vychází

$$\langle n|\hat{\mathsf{p}}|n\rangle = 0. \tag{4.2.20}$$

Lze odpozorovat pravidlo, že střední hodnota $\left\langle n\middle|f(r,s;\hat{\mathsf{a}},\hat{\mathsf{a}}^\dagger)\middle|n\right\rangle$, kde $f(r,s;\hat{\mathsf{a}},\hat{\mathsf{a}}^\dagger)$ je funkce součinu r operátorů $\hat{\mathsf{a}}$ a s operátorů $\hat{\mathsf{a}}^\dagger$ v libovolném pořadí, je nenulová pouze tehdy, pokud $r = s$. Obecněji maticový element $\left\langle m\middle|f(r,s;\hat{\mathsf{a}},\hat{\mathsf{a}}^\dagger)\middle|n\right\rangle$ je nenulový, pokud $m + r = n + s$.

[11] Lze navíc zavést veličiny rozměru souřadnice a hybnosti

$$x_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{M\Omega}}, \qquad p_0 \equiv \frac{x_0}{\hbar} = \sqrt{\hbar M\Omega} \tag{4.2.15}$$

a vztahy (4.2.17) přepsat do bezrozměrného tvaru

$$\hat{\mathsf{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{\mathsf{x}}}{x_0} + \mathrm{i}\frac{\hat{\mathsf{p}}}{p_0}\right). \tag{4.2.16}$$

Pro střední hodnoty kvadrátů operátorů souřadnice a hybnosti platí

$$\begin{aligned}
\left\langle n\middle|\hat{x}^2\middle|n\right\rangle &= \frac{\hbar}{2M\Omega}\left\langle n\middle|\left(\hat{a}^\dagger+\hat{a}\right)^2\middle|n\right\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2M\Omega}\left\langle n\middle|\underbrace{\left(\hat{a}^\dagger\right)^2}_{0}+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}+\underbrace{\hat{a}^2}_{0}\middle|n\right\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2M\Omega}\left\langle n\middle|\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\sqrt{n}\middle|n\right\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2M\Omega}(2n+1), \qquad (4.2.21)\\
\left\langle n\middle|\hat{p}^2\middle|n\right\rangle &= -\frac{\hbar M\Omega}{2}\left\langle n\middle|\left(\hat{a}^\dagger-\hat{a}\right)^2\middle|n\right\rangle \\
&= -\frac{\hbar M\Omega}{2}\left\langle n\middle|\underbrace{\left(\hat{a}^\dagger\right)^2}_{0}-\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}+\underbrace{\left(\hat{a}^\dagger\right)^2}_{0}\middle|n\right\rangle \\
&= \frac{\hbar M\Omega}{2}(2n+1). \qquad (4.2.22)
\end{aligned}$$

5. Operátor kinetické energie je

$$\hat{T} = \frac{1}{2M}\hat{p}^2, \qquad (4.2.23)$$

jehož střední hodnota vychází po dosazení (4.2.22)

$$\left\langle n\middle|\hat{T}\middle|n\right\rangle = \frac{1}{2M}\frac{\hbar M\Omega}{2}(2n+1) = \frac{1}{2}\hbar\Omega\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{E_n}{2}. \qquad (4.2.24)$$

Podobně potenciál

$$\hat{V} = \frac{1}{2}M\Omega^2\hat{x}^2 \qquad (4.2.25)$$

po dosazení (4.2.21) vychází

$$\left\langle n\middle|\hat{V}\middle|n\right\rangle = \frac{1}{2}M\Omega^2\frac{\hbar}{2M\Omega}(2n+1) = \frac{1}{2}\hbar\Omega\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{E_n}{2}. \qquad (4.2.26)$$

Viriálový teorém udává vztah mezi střední hodnotou operátoru kinetické energie a operátoru potenciálu pro libovolný stav $|\psi\rangle$,[12] tedy nikoliv jen pro vlastní stav Hamiltoniánu:

$$2\left\langle\psi\middle|\hat{T}\middle|\psi\right\rangle = \left\langle\psi\middle|\hat{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{x}}\hat{V}(\hat{x})\middle|\psi\right\rangle. \qquad (4.2.27)$$

To se v případě, že $\hat{V}(\hat{x})$ je homogenní funkce stupně s, dále zjednoduší na

$$2\left\langle\psi\middle|\hat{T}\middle|\psi\right\rangle = s\left\langle\psi\middle|\hat{V}\middle|\psi\right\rangle. \qquad (4.2.28)$$

V případě harmonického oscilátoru je $s = 2$. Pro střední hodnoty kinetické energie (4.2.24) a potenciálu (4.2.26) je viriálový teorém splněn.

6. Relace neurčitosti znějí

$$\Delta_n\hat{x}^2\Delta_n\hat{p}^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}, \qquad (4.2.29)$$

kde

$$\Delta_n\hat{x}^2 = \left\langle n\middle|\hat{x}^2\middle|n\right\rangle - \langle n|\hat{x}|n\rangle^2, \qquad (4.2.30a)$$
$$\Delta_n\hat{p}^2 = \left\langle n\middle|\hat{p}^2\middle|n\right\rangle - \langle n|\hat{p}|n\rangle^2. \qquad (4.2.30b)$$

[12] Výrazu $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{x}}\hat{V}(\hat{x})$ je třeba rozumět ve smyslu $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V(x)|_{x=\hat{x}}$.

Po dosazení vypočtených středních hodnot (4.2.19), (4.2.20), (4.2.21) a (4.2.22) do relací neurčitosti vychází

$$\begin{aligned}\Delta_n\hat{\mathsf{x}}^2\Delta_n\hat{\mathsf{p}}^2 &= \langle n|\hat{\mathsf{x}}^2|n\rangle\,\langle n|\hat{\mathsf{p}}^2|n\rangle\\ &= \frac{\hbar}{2M\Omega}(2n+1)\frac{\hbar M\Omega}{2}(2n+1)\\ &= \frac{\hbar^2}{4}(2n+1)^2.\end{aligned} \tag{4.2.31}$$

Jelikož $n \geq 0$, relace neurčitosti jsou splněny. Stav s nejmenší možnou neurčitostí je základní stav $n = 0$.

7. Operátory $\hat{\mathsf{a}}$ a $\hat{\mathsf{a}}^\dagger$ v x-reprezentaci se získají ze vztahů (4.2.17) přechodem $\hat{\mathsf{x}} \mapsto x$ a $\hat{\mathsf{p}} \mapsto -\mathrm{i}\hbar\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x$,

$$\hat{\mathsf{a}} = \sqrt{\frac{M\Omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{\hbar}{M\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right). \tag{4.2.32}$$

Pro základní stav harmonického oscilátoru platí

$$\hat{\mathsf{a}}\,|0\rangle = 0 \xrightarrow{x-\text{reprezentace}} \hat{\mathsf{a}}\psi_0(x) = 0, \tag{4.2.33}$$

což vede v x-reprezentaci na obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu

$$\left(x + \frac{\hbar}{M\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\psi_0(x) = 0. \tag{4.2.34}$$

Její řešení získané separací proměnných zní

$$\psi_0(x) = N\,\mathrm{e}^{-\frac{M\Omega}{2\hbar}x^2}. \tag{4.2.35}$$

Normalizační konstanta N vychází z podmínky

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(x)|^2\,\mathrm{d}x = 1 \Longrightarrow N = \sqrt[4]{\frac{M\Omega}{\pi\hbar}}. \tag{4.2.36}$$

Normalizovaná vlnová funkce základního stavu harmonického oscilátoru je tedy

$$\psi_0(x) = \sqrt[4]{\frac{M\Omega}{\pi\hbar}}\,\mathrm{e}^{-\frac{M\Omega}{2\hbar}x^2}. \tag{4.2.37}$$

Vlnové funkce vzbuzených stavů se nagenergují ze základního stavu působením operátoru $\hat{\mathsf{a}}^\dagger$ podle vztahu (4.1.18),

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\frac{M\Omega}{2\hbar}\right)^{\frac{n}{2}}\left(x - \frac{\hbar}{M\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\sqrt[4]{\frac{M\Omega}{\pi\hbar}}\,\mathrm{e}^{-\frac{M\Omega}{2\hbar}x^2}\,H_n\left(\sqrt{\frac{M\Omega}{\hbar}}x\right), \tag{4.2.38}$$

kde $H_n(\xi)$ je Hermitův polynom.

4.3 Stav s nenulovou výchylkou

Harmonický oscilátor je připraven ve stavu daném lineární kombinací dvou vlastních stavů Hamiltoniánu,

$$|\psi\rangle = \alpha\,|m\rangle + \beta\,|n\rangle\,, \tag{4.3.1}$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

1. Nalezněte čísla α, β tak, aby střední hodnota operátoru polohy ve stavu $|\psi\rangle$ byla maximální možná.
2. Pro tento stav určete $\langle\psi|\hat{\mathsf{x}}|\psi\rangle$, $\langle\psi|\hat{\mathsf{p}}|\psi\rangle$, střední kvadratické odchylky $\Delta_\psi\hat{\mathsf{x}}^2$, $\Delta_\psi\hat{\mathsf{p}}^2$ a ověřte platnost relací neurčitosti.

Řešení:

1. Střední hodnota operátoru polohy $\hat{x}$ pro harmonický oscilátor ve stavu $|\psi\rangle$ je

$$
\begin{aligned}
\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle &= \left(\alpha^* \langle m| + \beta^* \langle n|\right) \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}} \left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right) \left(\alpha |m\rangle + \beta |n\rangle\right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}} \left(\alpha^* \langle m| + \beta^* \langle n|\right) \Big(\alpha\sqrt{m+1}\,|m+1\rangle + \beta\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \\
&\qquad + \alpha\sqrt{m}\,|m-1\rangle + \beta\sqrt{n}\,|n-1\rangle\Big) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}} \Big[\alpha^*\beta\left(\sqrt{n+1}\,\delta_{n+1,m} + \sqrt{n}\,\delta_{n-1,m}\right) \\
&\qquad + \alpha\beta^*\left(\sqrt{m+1}\,\delta_{n,m+1} + \sqrt{m}\,\delta_{n,m-1}\right)\Big] \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}} \Big[\alpha^*\beta\left(\sqrt{m}\,\delta_{m,n+1} + \sqrt{m+1}\,\delta_{m+1,n}\right) \\
&\qquad + \alpha\beta^*\left(\sqrt{m}\,\delta_{m,n+1} + \sqrt{m+1}\,\delta_{m+1,n}\right)\Big]
\end{aligned} \tag{4.3.2}
$$

(v posledním řádku byly přeuspořádány členy a využito δ funkcí k záměně čísel v odmocninách). Střední hodnota souřadnice je tedy nulová, pokud $|m-n| \neq 1$. Bez újmy na obecnosti stačí dále vyšetřovat případ $m = n+1$, pro který

$$
\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = \sqrt{\frac{\hbar m}{2M\Omega}} \left(\alpha^*\beta + \alpha\beta^*\right) = 2\sqrt{\frac{\hbar m}{2M\Omega}}\, \mathrm{Re}\left(\alpha^*\beta\right). \tag{4.3.3}
$$

Dalším krokem je tedy nalézt maximum této funkce vzhledem k α a β. Parametry α a β nejsou nezávislé, nýbrž jsou vázány podmínkou

$$
|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{4.3.4}
$$

plynoucí z normalizace vektoru $|\psi\rangle$.
Maximum lze určit dvěma způsoby:

- Absolutní hodnota součtu parametrů α a β je v přímém vztahu k reálné části součinu $\alpha^*\beta$,

$$
|\alpha+\beta|^2 = (\alpha+\beta)^*(\alpha+\beta) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\alpha^*\beta\right) = 1 + 2\,\mathrm{Re}\left(\alpha^*\beta\right). \tag{4.3.5}
$$

  takže namísto výrazu $2\,\mathrm{Re}\left(\alpha^*\beta\right)$ se maximalizuje $|\alpha+\beta|$. Za dodatečné podmínky (4.3.4) je nejvyšší hodnoty dosaženo pro $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$.
- Alternativně se dá využít polární reprezentace parametrů α a β

$$
\alpha = \cos\theta\, e^{i\phi}, \qquad \beta = \sin\theta, \tag{4.3.6}
$$

  kde $\theta, \phi \in [0, 2\pi)$ jsou dva úhly. Tato parametrizace automaticky splňuje podmínku (4.3.4). Střední hodnota (4.3.3) je v této parametrizaci

$$
\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = \sqrt{\frac{\hbar m}{2M\Omega}} \sin 2\theta \cos\phi \tag{4.3.7}
$$

  a nabývá maximální hodnoty, pokud je $2\theta = \pi/2$ a zároveň $\phi = 0$. To odpovídá hodnotám $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$.

Vektor, který maximalizuje střední hodnotu polohy, má tedy tvar

$$
|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|m\rangle + |m-1\rangle\right), \tag{4.3.8}
$$

a střední hodnota operátoru souřadnice nabývá velikosti

$$
\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = \sqrt{\frac{\hbar m}{2M\Omega}}. \tag{4.3.9}
$$

2. Střední hodnota operátoru hybnosti pro stav $|\psi\rangle$ je

$$\langle\psi|\hat{\mathsf{p}}|\psi\rangle = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar M\Omega}{2}}\,\langle\psi|\hat{\mathsf{a}}^\dagger - \hat{\mathsf{a}}|\psi\rangle = 0. \tag{4.3.10}$$

3. Pro střední kvadratické odchylky je potřeba určit střední hodnoty kvadrátu operátorů souřadnice a hybnosti. K jejich výpočtu se využije již získaných vztahů (4.2.21) a (4.2.22):

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\hat{\mathsf{x}}^2|\psi\rangle &= \frac{\hbar}{4M\Omega}\left(\langle n| + \langle n+1|\right)\left(\left(\hat{\mathsf{a}}^\dagger\right)^2 + \hat{\mathsf{a}}\hat{\mathsf{a}}^\dagger + \hat{\mathsf{a}}^\dagger\hat{\mathsf{a}} + \hat{\mathsf{a}}^2\right)\left(|n\rangle + |n+1\rangle\right)\\
&= \frac{\hbar}{4M\Omega}\left(\underbrace{\langle n|\hat{\mathsf{a}}\hat{\mathsf{a}}^\dagger + \hat{\mathsf{a}}^\dagger\hat{\mathsf{a}}|n\rangle}_{2n+1} + \underbrace{\langle n+1|\hat{\mathsf{a}}\hat{\mathsf{a}}^\dagger + \hat{\mathsf{a}}^\dagger\hat{\mathsf{a}}|n+1\rangle}_{2(n+1)+1}\right)\\
&= \frac{\hbar}{M\Omega}\,(n+1)\,, && \text{(4.3.11a)}\\
\langle\psi|\hat{\mathsf{p}}^2|\psi\rangle &= \hbar M\Omega\,(n+1)\,. && \text{(4.3.11b)}
\end{aligned}$$

Střední kvadratické odchylky budou

$$\begin{aligned}
\Delta_\psi\hat{\mathsf{x}}^2 &= \frac{\hbar}{M\Omega}(n+1) - \frac{\hbar}{2M\Omega}(n+1) = \frac{\hbar}{2M\Omega}(n+1), && \text{(4.3.12a)}\\
\Delta_\psi\hat{\mathsf{p}}^2 &= \hbar M\Omega(n+1) && \text{(4.3.12b)}
\end{aligned}$$

a relace neurčitosti pro harmonický oscilátor ve stavu $|\psi\rangle$ vycházejí

$$\Delta_\psi\hat{\mathsf{x}}^2\Delta_\psi\hat{\mathsf{p}}^2 = \frac{\hbar^2}{2}(n+1)^2 > \frac{\hbar^2}{4}. \tag{4.3.13}$$

4.4 Posunutí harmonického oscilátoru

Je zadán operátor

$$\hat{\mathsf{T}}(\alpha) = \mathrm{e}^{-\alpha(\hat{\mathsf{a}} - \hat{\mathsf{a}}^\dagger)}, \tag{4.4.1}$$

kde $\hat{\mathsf{a}}$, $\hat{\mathsf{a}}^\dagger$ jsou posunovací operátory splňující komutační relace (4.1.2) a α je reálný parametr.

1. Ověřte, že operátor $\hat{\mathsf{T}}(\alpha)$ je unitární.
2. Ukažte, čemu se rovná $\hat{\mathsf{T}}^{-1}(\alpha)\,\hat{\mathsf{a}}\,\hat{\mathsf{T}}(\alpha)$ a $\hat{\mathsf{T}}^{-1}(\alpha)\,\hat{\mathsf{a}}^\dagger\,\hat{\mathsf{T}}(\alpha)$.
3. Ukažte, čemu se rovná $\hat{\mathsf{T}}^{-1}(\alpha)\,\hat{\mathsf{x}}\,\hat{\mathsf{T}}(\alpha)$ a $\hat{\mathsf{T}}^{-1}(\alpha)\,\hat{\mathsf{p}}\,\hat{\mathsf{T}}(\alpha)$.
4. Ukažte, čemu se rovná $\hat{\mathsf{H}}' = \hat{\mathsf{T}}^{-1}(\alpha)\,\hat{\mathsf{H}}\,\hat{\mathsf{T}}(\alpha)$, kde $\hat{\mathsf{H}}$ je operátor harmonického oscilátoru (4.2.1). Určete spektrum $\hat{\mathsf{H}}'$.
5. Nalezněte střední hodnotu operátoru souřadnice, je-li harmonický oscilátor ve stavu $|n;\alpha\rangle = \hat{\mathsf{T}}(\alpha)\,|n\rangle$, kde $|n\rangle$ je vlastní vektor harmonického oscilátoru příslušející k energii E_n.

Řešení:

1. Unitarita se ověří přímo z definice za využití vztahu (1.4.1) (v obou exponenciálách se vyskytuje stejný operátor $\hat{\mathsf{A}} \equiv \hat{\mathsf{a}} - \hat{\mathsf{a}}^\dagger$, který samozřejmě komutuje sám se sebou)

$$\hat{\mathsf{T}}^\dagger(\alpha)\hat{\mathsf{T}}(\alpha) = \mathrm{e}^{-\alpha(\hat{\mathsf{a}}^\dagger - \hat{\mathsf{a}})}\,\mathrm{e}^{-\alpha(\hat{\mathsf{a}} - \hat{\mathsf{a}}^\dagger)} = \mathrm{e}^{\alpha(\hat{\mathsf{a}} - \hat{\mathsf{a}}^\dagger) - \alpha(\hat{\mathsf{a}} - \hat{\mathsf{a}}^\dagger)} = \mathrm{e}^{\hat{0}} = \hat{1}. \tag{4.4.2}$$

2. Z BCH formule (1.4.2) plyne

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{T}}^{-1}(\alpha)\hat{\mathsf{a}}\hat{\mathsf{T}}(\alpha) &= \mathrm{e}^{\alpha\left(\hat{\mathsf{a}}-\hat{\mathsf{a}}^\dagger\right)}\,\hat{\mathsf{a}}\,\mathrm{e}^{-\alpha\left(\hat{\mathsf{a}}-\hat{\mathsf{a}}^\dagger\right)}+\cdots\\ &= \hat{\mathsf{a}}+\left[\alpha\left(\hat{\mathsf{a}}-\hat{\mathsf{a}}^\dagger\right),\hat{\mathsf{a}}\right]+\cdots\\ &= \hat{\mathsf{a}}+\alpha\underbrace{\left[\hat{\mathsf{a}},\hat{\mathsf{a}}\right]}_{0}+\alpha\underbrace{\left[\hat{\mathsf{a}},\hat{\mathsf{a}}^\dagger\right]}_{1}+\cdots\\ &= \hat{\mathsf{a}}+\alpha \end{aligned}\tag{4.4.3}$$

(ostatní členy v rozvoji jsou nulové, jelikož komutátor odpovídající operátoru $\hat{\mathsf{K}}_1$ je číslo, a tudíž vnořené komutátory vymizí). Stejný výraz vyjde i pro operátor $\hat{\mathsf{a}}^\dagger$:

$$\hat{\mathsf{T}}^{-1}(\alpha)\hat{\mathsf{a}}^\dagger\hat{\mathsf{T}}(\alpha) = \hat{\mathsf{a}}^\dagger+\alpha.\tag{4.4.4}$$

3. Operátor souřadnice $\hat{\mathsf{x}}$ se vyjádří pomocí posunovacích operátorů (4.2.17) a poté se využije výsledků z předchozího bodu:

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{T}}^{-1}(\alpha)\hat{\mathsf{x}}\hat{\mathsf{T}}(\alpha) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}}\hat{\mathsf{T}}^{-1}(\alpha)\left(\hat{\mathsf{a}}^\dagger+\hat{\mathsf{a}}\right)\hat{\mathsf{T}}(\alpha)\\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}}\left(\hat{\mathsf{a}}^\dagger+\hat{\mathsf{a}}+2\alpha\right)\\ &= \hat{\mathsf{x}}+\alpha\sqrt{\frac{2\hbar}{M\Omega}}.\end{aligned}\tag{4.4.5}$$

Operátor $\hat{\mathsf{T}}(\alpha)$ je speciální verze operátoru posunutí (1.5.1) o vzdálenost

$$d = \alpha\sqrt{\frac{2\hbar}{M\Omega}} = \sqrt{2}\,\alpha\,x_0.\tag{4.4.6}$$

To lze nahlédnout i přímo ze zkutečnosti, že v argumentu exponenciály operátoru $\hat{\mathsf{T}}$ lze vyjádřit rozdíl $\hat{\mathsf{a}}-\hat{\mathsf{a}}^\dagger$ pomocí operátoru hybnosti (4.2.17),

$$\hat{\mathsf{a}}-\hat{\mathsf{a}}^\dagger = \mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\hbar M\Omega}}\,\hat{\mathsf{p}},\tag{4.4.7}$$

takže

$$\hat{\mathsf{T}}(\alpha) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sqrt{\frac{2\hbar}{M\Omega}}\,\hat{\mathsf{p}}} = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}d\hat{\mathsf{p}}},\tag{4.4.8}$$

což je forma ekvivalentní s (1.5.1). Jelikož operátor posunutí komutuje s operátorem hybnosti, je

$$\hat{\mathsf{T}}^{-1}(\alpha)\hat{\mathsf{p}}\hat{\mathsf{T}}(\alpha) = \hat{\mathsf{p}}.\tag{4.4.9}$$

4. Ze vztahů (4.4.3) a (4.4.4) vyplývá:

$$\begin{aligned}\hat{\mathsf{H}}' &= \hat{\mathsf{T}}^{-1}(\alpha)\hbar\Omega\left(\hat{\mathsf{a}}^\dagger\hat{\mathsf{a}}+\frac{1}{2}\right)\hat{\mathsf{T}}(\alpha)\\ &= \hbar\Omega\left(\hat{\mathsf{T}}^{-1}(\alpha)\hat{\mathsf{a}}^\dagger\underbrace{\hat{\mathsf{T}}(\alpha)\hat{\mathsf{T}}^{-1}(\alpha)}_{\hat{1}}\hat{\mathsf{a}}\hat{\mathsf{T}}(\alpha)+\frac{1}{2}\right)\\ &= \hbar\Omega\left[\left(\hat{\mathsf{a}}^\dagger+\alpha\right)\left(\hat{\mathsf{a}}+\alpha\right)+\frac{1}{2}\right]\\ &= \hbar\Omega\left(\hat{\mathsf{a}}^\dagger\hat{\mathsf{a}}+\frac{1}{2}\right)+\alpha\hbar\Omega\underbrace{\left(\hat{\mathsf{a}}^\dagger+\hat{\mathsf{a}}\right)}_{\sqrt{\frac{2M\Omega}{\hbar}}\,\hat{\mathsf{x}}}+\alpha^2\hbar\Omega\\ &= \hat{\mathsf{H}}+\alpha\Omega\sqrt{2\hbar\Omega M}\,\hat{\mathsf{x}}+\alpha^2\hbar\Omega.\end{aligned}\tag{4.4.10}$$

Hamiltonián $\hat{\mathsf{H}}'$ má stejné vlastní hodnoty jako $\hat{\mathsf{H}}$, jelikož oba dva spolu souvisí unitární transformací danou operátorem $\hat{\mathsf{T}}(\alpha)$. Vlastní vektory posunutého Hamiltoniánu $\hat{\mathsf{H}}'$ jsou

$$|n;\alpha\rangle \equiv \hat{\mathsf{T}}^{-1}(\alpha)\,|n\rangle\,.\tag{4.4.11}$$

5. Střední hodnota operátoru $\hat{x}$ pro harmonický oscilátor ve stavu $|n;\alpha\rangle$ vychází

$$\langle n;\alpha|\hat{x}|n;\alpha\rangle = \left\langle n\left|\underbrace{\hat{T}^{-1}(\alpha)\hat{x}\hat{T}(\alpha)}_{\hat{x}+d}\right|n\right\rangle = \underbrace{\langle n|\hat{x}|n\rangle}_{0} + d\underbrace{\langle n|n\rangle}_{1} = d. \tag{4.4.12}$$

4.5 Nabitý harmonický oscilátor v elektrickém poli

Částice s nábojem q se nachází v potenciálu harmonického oscilátoru, a navíc v konstantním homogenním elektrickém poli intenzity $\mathcal{E}$, směřujícím podél souřadné osy z. Nalezněte spektrum tohoto systému.

Řešení:

Hamiltonián harmonického oscilátoru v homogenním elektrickém poli

$$\hat{H}'(\mathcal{E}) = \frac{1}{2M}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}M\Omega^2\hat{x}^2 - q\mathcal{E}\hat{x} \tag{4.5.1}$$

se přepíše pomocí výsledku (4.4.10) předchozího příkladu,

$$\hat{H}'(\mathcal{E}) = \hat{H} - q\mathcal{E}\hat{x} = \hat{T}^{-1}(\alpha)\hat{H}\hat{T}(\alpha) - e_0, \tag{4.5.2}$$

kde

$$\alpha\Omega\sqrt{2\hbar\Omega M} = -q\mathcal{E} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = -\frac{q\mathcal{E}}{\Omega}\sqrt{\frac{1}{2\hbar\Omega M}}, \tag{4.5.3a}$$

$$e_0 = \alpha^2\hbar\Omega = \frac{q^2\mathcal{E}^2}{\Omega^2}\frac{\hbar\Omega}{2\hbar\Omega M} = \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2M\Omega^2}, \tag{4.5.3b}$$

$$d = -\frac{q\mathcal{E}}{M\Omega^2}. \tag{4.5.3c}$$

Vlastní hodnoty a vlastní vektory Hamiltoniánu $\hat{H}'(\mathcal{E})$ tedy jsou

$$E'_n = E_n - e_0 = \hbar\Omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2M\Omega^2} \tag{4.5.4a}$$

$$|n\rangle' = \hat{T}^{-1}\left(-\frac{q\mathcal{E}}{\Omega}\sqrt{\frac{1}{2\hbar\Omega M}}\right)|n\rangle\,. \tag{4.5.4b}$$

Vlnové funkce $\psi'_n(x) \equiv \langle x|n\rangle'$ jsou oproti vlnovým funkcím harmonického oscilátoru posunuté v souřadnici o vzdálenost d, viz (1.5.11).

K výsledku lze alternativně dospět tak, že se Hamiltonián $\hat{H}'(\mathcal{E})$ upraví na úplný čtverec a převede na tvar $\hat{H}$ vhodným přeznačením souřadnice.