6 Skládání momentu hybnosti

Jsou zadány dva nezávislé operátory momentu hybnosti $\hat{\mathbf{J}}^{(1)}, \hat{\mathbf{J}}^{(2)}$, $\left[\hat{\mathbf{J}}^{(1)}, \hat{\mathbf{J}}^{(2)}\right] = 0$, které působí na Hilbertových prostorech $\mathcal{H}^{(1)}, \mathcal{H}^{(2)}$. Operátor celkového impulsmomentu[14]

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}^{(1)} + \hat{\mathbf{J}}^{(2)} \tag{6.0.3}$$

pak působí na Hilbertově prostoru $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$. Mezi jednotlivými operátory a jejich složkami platí komutační relace

$$\left[\hat{J}_j, \hat{J}_k\right] = \mathrm{i}\epsilon_{jkl}\hat{J}_l\,, \tag{6.0.4a}$$

$$\left[\hat{J}_j, \hat{\mathbf{J}}^2\right] = 0\,, \tag{6.0.4b}$$

$$\left[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{\mathbf{J}}^{(1)2}\right] = \left[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{\mathbf{J}}^{(2)2}\right] = 0\,, \tag{6.0.4c}$$

$$\left[\hat{J}_j, \hat{\mathbf{J}}^{(1)2}\right] = \left[\hat{J}_j, \hat{\mathbf{J}}^{(2)2}\right] = 0\,. \tag{6.0.4d}$$

Z toho vyplývá, že na prostoru $\mathcal{H}$ lze volit za úplnou množinu komutujících operátorů jednu z následujících dvou množin operátorů se svými bázemi:

$$\begin{array}{lcl} \hat{\mathbf{J}}^{(1)2}, \hat{J}_3^{(1)}, \hat{\mathbf{J}}^{(2)2}, \hat{J}_3^{(2)} & \longrightarrow & \{|j_1\, m_1\rangle \otimes |j_2\, m_2\rangle\} \\ \hat{\mathbf{J}}^{(1)2}, \hat{\mathbf{J}}^{(2)2}, \hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_3 & \longrightarrow & \{|j_1\, j_2\, j\, m\rangle\} \end{array} \tag{6.0.5}$$

(dále budeme užívat zjednodušené značení $|j_1\, m_1\rangle \otimes |j_2\, m_2\rangle \equiv |j_1\, m_1\rangle\, |j_2\, m_2\rangle$). Platí tedy

$$\hat{\mathbf{J}}^{(1)2}\, |j_1 l_2 l m\rangle = j_1(j_1+1)\, |j_1\, j_2\, j\, m\rangle\;, \tag{6.0.6a}$$

$$\hat{\mathbf{J}}^{(2)2}\, |j_1\, j_2\, j\, m\rangle = j_2(j_2+1)\, |j_1\, j_2\, j\, m\rangle\;, \tag{6.0.6b}$$

$$\hat{\mathbf{J}}^{2}\, |j_1\, j_2\, j\, m\rangle = j(j+1)\, |j_1\, j_2\, j\, m\rangle\;, \tag{6.0.6c}$$

$$\hat{J}_3\, |j_1\, j_2\, j\, m\rangle = m\, |j_1\, j_2\, j\, m\rangle\;, \tag{6.0.6d}$$

přičemž kvantová čísla musejí splňovat

$$\boxed{|j_1 - j_2| \le j \le j_1 + j_2\,, \qquad m_1 + m_2 = m}\,. \tag{6.0.7}$$

Mezi oběma bázemi platí vztah

$$\boxed{|j_1\, j_2\, j\, m\rangle = \sum_{m_1\, m_2} C^{j\,m}_{j_1\, m_1\, j_2\, m_2}\, |j_1\, m_1\rangle\, |j_2\, m_2\rangle}\,, \tag{6.0.8}$$

kde $C^{j\,m}_{j_1\, m_1\, j_2\, m_2}$ jsou *Clebsch-Gordanovy koeficienty*[15].

6.1 Explicitní výpočet Clebsch-Gordanových koeficientů

Explicitním výpočtem pomocí posunovacích operátorů $\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm \mathrm{i}\hat{J}_2$ nalezněte Clebsch-Gordanovy koeficienty pro skládání impulsmomentů $j_1 = j_2 = 1$.

[14]Formálně by se mělo správně psát

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}^{(1)} \otimes \hat{\mathbf{1}}^{(2)} + \hat{\mathbf{1}}^{(1)} \otimes \hat{\mathbf{J}}^{(2)}\,, \tag{6.0.1}$$

což ve složkách znamená

$$\hat{J}_j = \hat{J}_j^{(1)} \otimes \hat{1}^{(2)} + \hat{1}^{(1)} \otimes \hat{J}_j^{(2)}\,, \qquad j = 1,2,3\,, \tag{6.0.2}$$

ve shodě s již dříve použitým operátorem dvou spinů (3.1.3).

[15]Jiné způsoby zápisu Clebsch-Gordanových koeficientů používané v literatuře jsou

$$C^{jm}_{j_1\, m_1\, j_2\, m_2} = \langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2 | j\, m\rangle = (j_1\, j_2\, j | m_1\, m_2\, m) \tag{6.0.9}$$

Řešení:

Budeme užívat zkrácený zápis

$$|j_1\, j_2\, j\, m\rangle = |1\, 1\;\, j\, m\rangle \to |j\, m\rangle \tag{6.1.1a}$$

$$\left|j_{1,2}\, m_{1,2}\right\rangle = \left|1\, m_{1,2}\right\rangle \to \left|m_{1,2}\right\rangle \tag{6.1.1b}$$

Na základě trojúhelníkové nerovnosti (6.0.7) může celkový moment hybnosti nabývat pouze hodnot $j \in \{0, 1, 2\}$.

- Začíná se obvykle s vektory s nejvyšší váhou:

$$|2\,2\rangle = |1\rangle\,|1\rangle \tag{6.1.2}$$

(fázi můžeme volit obecně libovolně, jednička je v tzv. *Condon-Shortleyově fázové konvenci*), takže

$$C^{2\,2}_{1\,1\,1\,1} = 1. \tag{6.1.3}$$

- K výpočtu dalších Clebsch-Gordanových koeficientů v podprostoru $j = 2$ se využívá postupného působení posunovacími operátory $\hat{J}_\pm$, které splňují

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{J}_\pm\,|j\,m\rangle &= \alpha^{(\pm)}(j,m)\,|j\,m\pm 1\rangle\;, \\ \alpha^{(\pm)}(j,m) &= \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)} \end{aligned}} \tag{6.1.4}$$

(analogické vztahy platí pro jednotlivé impulsmomenty $\hat{\mathbf{J}}^{(1,2)}$, přičemž $\hat{J}_\pm = \hat{J}^{(1)}_\pm + \hat{J}^{(2)}_\pm$). Působení operátoru $\hat{J}_-$ na obě strany rovnosti (6.1.2) dá

$$\hat{J}_-\,|2\,2\rangle = 2\,|2\,1\rangle\;, \tag{6.1.5a}$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_-\,|1\rangle\,|1\rangle &= \hat{J}^{(1)}_-\,|1\rangle\,|1\rangle + \hat{J}^{(2)}_-\,|1\rangle\,|1\rangle \\ &= \sqrt{2}\,(|0\rangle\,|1\rangle + |1\rangle\,|0\rangle)\,, \end{aligned} \tag{6.1.5b}$$

z čehož vyplývá, že

$$|2\,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|1\rangle\,|0\rangle + |0\rangle\,|1\rangle)\,, \tag{6.1.6}$$

a tedy

$$C^{2\,1}_{1\,0\,1\,1} = C^{2\,1}_{1\,1\,1\,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{6.1.7}$$

- Jelikož musí platit $m = m_1 + m_2$, viz (6.0.7), jsou ostatní Clebsch-Gordanovy koeficienty s $j = 2$ a $m = 1$ nulové:

$$C^{2\,1}_{1\,1\,1\,1} = C^{2\,1}_{1\,0\,1\,0} = C^{2\,1}_{1\,-1\,1\,0} = C^{2\,1}_{1\,0\,1\,-1} = C^{2\,1}_{1\,-1\,1\,-1} = 0. \tag{6.1.8}$$

- Další působení posunovacího operátoru vede na

$$\hat{J}_-\,|2\,1\rangle = \sqrt{6}\,|2\,0\rangle\;, \tag{6.1.9a}$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_-\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,(|0\rangle\,|1\rangle + |1\rangle\,|0\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\,|{-1}\rangle\,|1\rangle + \sqrt{2}\,|0\rangle\,|0\rangle + \sqrt{2}\,|0\rangle\,|0\rangle + \sqrt{2}\,|1\rangle\,|{-1}\rangle\right) = \\ &= |{-1}\rangle\,|1\rangle + 2\,|0\rangle\,|0\rangle + |1\rangle\,|{-1}\rangle\;, \end{aligned} \tag{6.1.9b}$$

takže

$$|2\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(|{-1}\rangle\,|1\rangle + 2\,|0\rangle\,|0\rangle + |1\rangle\,|{-1}\rangle)\;. \tag{6.1.10}$$

Odpovídající Clebsch-Gordanovy koeficienty jsou

$$C^{2\,0}_{1\,-1\,1\,1} = C^{2\,0}_{1\,1\,1\,-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \tag{6.1.11a}$$

$$C^{2\,0}_{1\,0\,1\,0} = \frac{2}{\sqrt{6}}. \tag{6.1.11b}$$

Všechny ostatní koeficienty s $l = 2$, $m = 0$ jsou nulové.

- Opakování postupu působení operátorem $\hat{J}_-$ dá

$$|2\ -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle\,|-1\rangle + |-1\rangle\,|0\rangle\right), \tag{6.1.12a}$$

$$|2\ -2\rangle = |-1\rangle\,|-1\rangle \tag{6.1.12b}$$

a příslušné Clebsch-Gordanovy koeficienty jsou

$$C^{2\,-1}_{1\,0\,1\,-1} = C^{2\,-1}_{1\,-1\,1\,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{6.1.13a}$$

$$C^{2\,-2}_{1\,-1\,1\,-1} = 1. \tag{6.1.13b}$$

- V dalším kroku se přejde do podprostoru $j = 1$. Vektor s nejvyšší vahou $|1\,1\rangle$ lze zkonstruovat pouze ze dvou vektorů báze nesložených momentů hybnosti,

$$|1\,1\rangle = c_1\,|0\rangle\,|1\rangle + c_2\,|1\rangle\,|0\rangle\,. \tag{6.1.14}$$

Tento vektor musí být kolmý na $|2\,1\rangle$,

$$\langle 2\,1|1\,1\rangle = 0, \tag{6.1.15}$$

z čehož plyne rovnice

$$\frac{c_1}{\sqrt{2}} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} = 0. \tag{6.1.16}$$

Koeficienty c_1, c_2 jsou navíc vázany normalizační podmínkou $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$. Podle Condon-Shortleyovy fázové konvence se koeficienty c_1, c_2 volí reálné, a navíc koeficient u $|1\rangle\,|0\rangle$ kladný. To vede na jednoznačné vyjádření

$$|1\,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle\,|0\rangle - |0\rangle\,|1\rangle\right), \tag{6.1.17}$$

z čehož lze získat Clebsch-Gordanovy koeficienty

$$C^{1\,1}_{1\,1\,1\,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{6.1.18a}$$

$$C^{1\,1}_{1\,0\,1\,1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{6.1.18b}$$

- Nyní lze opět působit operátorem $\hat{J}_-$, což dá

$$|1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle\,|-1\rangle - |-1\rangle\,|1\rangle\right), \tag{6.1.19a}$$

$$|1\ -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle\,|-1\rangle - |-1\rangle\,|0\rangle\right), \tag{6.1.19b}$$

takže

$$C^{1\,0}_{1\,1\,1\,-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{6.1.20a}$$

$$C^{1\,0}_{1\,-1\,1\,1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{6.1.20b}$$

$$C^{1\,-1}_{1\,0\,1\,-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{6.1.20c}$$

$$C^{1\,-1}_{1\,-1\,1\,0} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{6.1.20d}$$

- Zbývá určit poslední stav, který leží v jednorozměrném podprostoru $j = 0$:

$$|0\,0\rangle = d_1\,|1\rangle\,|-1\rangle + d_2\,|0\rangle\,|0\rangle + d_3\,|-1\rangle\,|1\rangle\,. \tag{6.1.21}$$

Podmínky ortogonality

$$\langle 2\,0|0\,0\rangle = \langle 1\,0|0\,0\rangle = 0 \tag{6.1.22}$$

vedou na soustavu rovnic

$$\frac{d_1}{\sqrt{6}} + \frac{2d_2}{\sqrt{6}} + \frac{d_3}{\sqrt{6}} = 0, \tag{6.1.23a}$$

$$\frac{d_1}{\sqrt{2}} - \frac{d_3}{\sqrt{2}} = 0, \tag{6.1.23b}$$

z které vyplývají vztahy mezi koeficienty

$$d_1 = d_3 = -d_2. \tag{6.1.24}$$

S uvážením Condon-Shortleyovy fázové konvence je tedy

$$|0\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1\rangle\,|{-1}\rangle - |0\rangle\,|0\rangle + |{-1}\rangle\,|1\rangle\right) \tag{6.1.25}$$

a

$$C^{0\,0}_{1\,1\,1\,-1} = C^{0\,0}_{1\,-1\,1\,1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{6.1.26a}$$

$$C^{0\,0}_{1\,0\,1\,0} = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{6.1.26b}$$

	j	2	2	1	2	1	0	2	1	2
	m	+2	+1	+1	0	0	0	-1	-1	-2
m_1	m_2									
+1	+1	1								
+1	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$						
0	+1		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$						
+1	-1				$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$			
0	0				$\frac{2}{\sqrt{6}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$			
-1	+1				$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$			
0	-1							$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
-1	0							$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	
-1	-1									1

Tabulka 1: Clebsch-Gordanovy koeficienty pro impulsmomenty $j_1 = j_2 = 1$. Pokud v tabulce není uvedeno žádné číslo, je příslušný C-G koeficient nulový.

Všechny vypočítané Clebsch-Gordanovy koeficienty pro impulsmomenty $j_1 = j_2 = 1$ jsou přehledně uvedeny v tabulce 1.

Shrnutí

Obecný postup výpočtu Clebsch-Gordanových koeficientů je tedy následující:

1. Začne se s vektorem s nejvyšší váhou

$$|j_1, j_2, j = j_1 + j_2, m = j_1 + j_2\rangle = |j_1\, j_1\rangle\, |j_2\, m_2\rangle \tag{6.1.27}$$

2. Opakovaně se zapůsobí posunovacím operátorem $\hat{J}_-$ na obě strany rovnice. Tím se naleznou všechny vektory $|j_1, j_2, j = j_1 + j_2, m\rangle$, $m \in \{-(j_1 + j_2), \ldots, j_1 + j_2\}$ z podprostoru $j = j_1 + j_2$.
3. Vektor z podprostoru s o jedničku nižším $j = j_1 + j_2 - 1$ a s odpovídajícím nejvyšším možným $m = j_1 + j_2 - 1$ se určí z podmínky kolmosti na již vypočtený vektor z prostoru $j = j_1 + j_2$,

$$\langle j_1, j_2, j = j_1 + j_2 - 1, m = j_1 + j_2 - 1 | j_1, j_2, j = j_1 + j_2, m = j_1 + j_2 - 1\rangle = 0. \tag{6.1.28}$$

   V Condon-Shortleyově fázová konvenci je pak koeficient u členu s nejvyšším m_1 kladný a reálný.
4. Body 2 a 3 se opakují do té doby, než se dospěje do podprostoru s nejnižším možným $j = |j_1 - j_2|$.

6.2 Maticová realizace operátoru momentu hybnosti

Nalezněte maticovou realizaci operátoru $\hat{\mathbf{J}}$ pro částici se spinem $j = \frac{3}{2}$.

Řešení:

Hilbertův prostor všech stavů je čtyřrozměrný a jeho bázi tvoří vektory $\left|\frac{3}{2}\, m\right\rangle$, kde $m \in \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$. Operátory $\hat{\mathsf{J}}_j$ budou tedy realizovány maticemi 4×4. Stavy $\left|\frac{3}{2}\, m\right\rangle$ se přiřadí k vektorům

$$\left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \tag{6.2.1a}$$

$$\left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{6.2.1b}$$

Jelikož $\hat{\mathsf{J}}_3 \left|j\, m\right\rangle = m \left|j\, m\right\rangle$, matice J_3 bude diagonální, přičemž na diagonále budou vlastní hodnoty m:

$$\mathsf{J}_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}. \tag{6.2.2}$$

Pro výpočet J_1 a J_2 se využijeme vlastností operátorů $\hat{\mathsf{J}}_\pm \equiv \hat{\mathsf{J}}_1 \pm \mathrm{i}\hat{\mathsf{J}}_2$ (6.1.4):

$$\mathsf{J}_- \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \alpha^{(-)}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \sqrt{3} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \tag{6.2.3a}$$

a podobně

$$\mathsf{J}_- \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \alpha^{(-)}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \tag{6.2.3b}$$

$$\mathsf{J}_- \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \alpha^{(-)}\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \sqrt{3} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \tag{6.2.3c}$$

takže

$$\mathsf{J}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{J}_+ = \mathsf{J}_-^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.2.4}$$

a z inverzních vztahů k definici $\hat{\mathsf{J}}_\pm$ se dostane

$$\mathsf{J}_1 = \frac{\mathsf{J}_+ + \mathsf{J}_-}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.2.5a}$$

$$\mathsf{J}_2 = \frac{\mathsf{J}_+ - \mathsf{J}_-}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.2.5b}$$

Přímým výpočtem se lze přesvědčit, že tyto matice splňují komutační relace pro impulsmoment $\left[\mathsf{J}_j, \mathsf{J}_k\right] = \mathrm{i}\epsilon_{jkl}\mathsf{J}_l$. Jedná se o čtyřrozměrnou reprezentaci rotační grupy SO(3).

6.3 Moment hybnosti atomu vodíku

Jádro atomu vodíku (proton) má spin $s_p = \frac{1}{2}$, spin obíhajícího elektronu je $s_e = \frac{1}{2}$ a elektron se nachází na orbitalu d (orbitální moment hybnosti je tedy $l = 2$). Operátor celkového momentu hybnosti označíme

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{S}}^{(p)} + \hat{\mathbf{S}}^{(e)} + \hat{\mathbf{L}}\,. \tag{6.3.1}$$

1. Určete celkový počet kvantových stavů, kterých může moment hybnosti $\hat{\mathbf{J}}$ nabývat.

2. Určete, jaké hodnoty může mít celkový moment hybnosti j a kolik stavů přísluší každé jeho hodnotě.

3. Určete normalizované stavy

$$|j\,m\rangle = \begin{cases} |3\,3\rangle \\ |3\,2\rangle \\ |3\,1\rangle \end{cases}, \tag{6.3.2}$$

   kde m značí projekci celkového momentu hybnosti $\hat{\mathbf{J}}$ na třetí souřadnou osu.

4. Určete střední hodnotu

$$\left\langle 3\,2 \middle| \hat{\mathbf{S}}^{(e)} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(p)} \middle| 3\,2 \right\rangle. \tag{6.3.3}$$

   Nápověda: Skalární součin operátorů $\hat{\mathbf{S}}^{(e)} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(p)}$ vyjádřete pomocí operátorů $\hat{S}_{\pm}^{(e,p)}$ a $\hat{S}_3^{(e,p)}$.

Řešení:

1. Pro obecnou hodnotu momentu hybnosti j existuje $2j + 1$ odlišných stavů, takže
   - $s_p = \frac{1}{2}$ dává 2 možné stavy,
   - $s_e = \frac{1}{2}$ dává také 2 možné stavy a
   - $l = 2$ dává 5 možných stavů,

   celkem tedy $2 \times 2 \times 5 = 20$ stavů.

2. Složení dvou momentů hybnosti j_1 a j_2 vede díky trojúhelníkové nerovnosti (6.0.7) na celkový moment hybnosti s možnými hodnotami od $|j_1 - j_2|$ do $j_1 + j_2$. Složení dvou spinů s_p a s_e dá tedy dvě možné hodnoty momentu hybnosti $s = 0$ a $s = 1$. Pokud se k mezivýsledku $s = 0$ přidá orbitální moment hybnosti $l = 2$, výsledkem bude jediná možná hodnota $j = 2$ (5 možných stavů). Přidá-li se orbitální moment hybnosti k mezivýsledku $s = 1$, budou možné tři různé hodnoty $j = 1$ (3 možné stavy), $j = 2$ (5 možných stavů) a $j = 3$ (7 možných stavů). Platí tedy:
   - $j = 1$ dává 3 možné stavy,
   - $j = 2$ dává 10 možných stavů (5 pro $s = 0$ a 5 pro $s = 1$) a
   - $j = 3$ dává 7 možných stavů,

   celkem tedy $3 + 10 + 7 = 20$ stavů, což souhlasí s výsledkem předchozího bodu.

3. Stav $|j\,m\rangle = |3\,3\rangle$ je jedinečný (je to stav s nejvyšší váhou), který má v bázi jednotlivých momentů hybnosti vyjádření

$$|3\,3\rangle = \left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle_p \otimes \left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle_e \otimes |2\,2\rangle_J\,. \tag{6.3.4}$$

   Stav $|3\,2\rangle$ se získá působením posunovacího operátoru $\hat{J}_- = \hat{S}_{p-} + \hat{S}_{e-} + \hat{J}_-$ na obě strany rovnosti za využití vzorců (6.1.4) (pro zjednodušení zápisu vynecháváme znak tenzorového součinu):

$$\begin{aligned}\sqrt{6}\,|3\,2\rangle = {} & \left|\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\right\rangle_p \left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle_e |2\,2\rangle_J + \left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle_p \left|\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\right\rangle_e |2\,2\rangle_J \\ & + 2\left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle_p \left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle_e |2\,1\rangle_J\,,\end{aligned} \tag{6.3.5}$$

z čehož se vyjádří stav $|3\,2\rangle$ vydělením $\sqrt{6}$.

Opakované působení operátorem $\hat{J}_-$ dá zbývající hledané stavy

$$
\begin{aligned}
|3\,1\rangle = \frac{1}{2\sqrt{15}}\Bigg(&\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle_p \left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle_e |2\,2\rangle_J + 2\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle_p \left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle_e |2\,1\rangle_J \\
&+ \left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle_p \left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle_e |2\,2\rangle_J + 2\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle_p \left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle_e |2\,1\rangle_J \\
&+ 2\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle_p \left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle_e |2\,1\rangle_J + 2\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle_p \left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle_e |2\,1\rangle_J \\
&+ 2\sqrt{6}\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle_p \left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle_e |2\,0\rangle_J \Bigg) \\
= \frac{1}{\sqrt{15}}\Bigg(&\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle_p \left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle_e |2\,2\rangle_J + 2\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle_p \left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle_e |2\,1\rangle_J \\
&+ 2\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle_p \left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle_e |2\,1\rangle_J + \sqrt{6}\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle_p \left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle_e |2\,0\rangle_J \Bigg).
\end{aligned}
\tag{6.3.6}
$$

4. Pro dva obecné momenty hybnosti $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ platí rozklad

$$
\hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{B}} = \hat{A}_1\hat{B}_1 + \hat{A}_2\hat{B}_2 + \hat{A}_3\hat{B}_3 = \frac{1}{2}\left(\hat{A}_+\hat{B}_- + \hat{A}_-\hat{B}_+\right) + \hat{A}_3\hat{B}_3\,, \tag{6.3.7}
$$

takže speciálně pro $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{S}}_p$ a $\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{S}}_e$ se dostane

$$
\begin{aligned}
\hat{S}_{p3}\hat{S}_{e3}\,|3\,2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\Bigg(&-\frac{1}{4}\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle_p \left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle_e |2\,2\rangle_J - \frac{1}{4}\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle_p \left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle_e |2\,2\rangle_J \\
&+ \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle_p \left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle_e |2\,1\rangle_J \Bigg),
\end{aligned}
\tag{6.3.8a}
$$

$$
\hat{S}_{p+}\hat{S}_{e-}\,|3\,2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle_p \left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle_e |2,2\rangle_J\ , \tag{6.3.8b}
$$

$$
\hat{S}_{p-}\hat{S}_{e+}\,|3\,2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle_p \left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle_e |2,2\rangle_J\ , \tag{6.3.8c}
$$

Dílčí maticové elementy pro rozklad (6.3.7) jsou

$$
\left\langle 3\,2\middle|\hat{S}_{p3}\hat{S}_{e3}\middle|3\,2\right\rangle = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{1}{12}\,, \tag{6.3.9a}
$$

$$
\left\langle 3\,2\middle|\hat{S}_{p+}\hat{S}_{e-}\middle|3\,2\right\rangle = \left\langle 3\,2\middle|\hat{S}_{p-}\hat{S}_{e+}\middle|3\,2\right\rangle = \frac{1}{6}\,, \tag{6.3.9b}
$$

a hledaný maticový element má tedy hodnotu

$$
\left\langle 3\,2\middle|\hat{\mathbf{S}}_p\cdot\hat{\mathbf{S}}_e\middle|3\,2\right\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}\,. \tag{6.3.10}
$$

Poznámka: Příklad je převzat ze sbírky [8], příklad 3.12.