9 Koherentní stavy harmonického oscilátoru

V této části se navazuje zejména na kapitolu 4 o algebraickém řešení harmonického oscilátoru. Cílem je prozkoumat vlastnosti *koherentního stavu* jednorozměrného harmonického oscilátoru

$$\boxed{|z\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle}, \tag{9.0.1}$$

kde $z \in \mathbb{C}$ je libovolné komplexní číslo a $|n\rangle$ je vlastní stav harmonického oscilátoru (4.1.3) příslušející energii E_n, dané vztahem (4.2.14).

Níže uvedený postup je deduktivní a vychází z definice koherentního stavu (9.0.1). Dá se však postupovat i opačně: (i) buď hledat stavy harmonického oscilátoru, které minimalizují relace neurčitosti (9.4.12), jak je popsáno v práci [10] (strana 220), nebo hledat takové stavy, které co nejlépe aproximují pohyb klasické částice, tj. splňují vztah (9.5.9) pro střední hodnoty $\hat{\mathsf{x}}$ a $\hat{\mathsf{p}}$. Tento postup je sledován například v učebnici [11].

9.1 Poissonovo rozdělení

Poissonovo rozdělení udává počet n výskytu jevů v určitém intervalu, pokud jsou jednotlivé jevy statisticky nezávislé. Rozdělení je dáno předpisem

$$P_n = \frac{\lambda^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}, \tag{9.1.1}$$

kde λ je parametr Poissonova rozdělení.

1. Ukažte, že rozdělení je normalizované.
2. Nalezněte střední hodnotu Poissonova rozdělení.
3. Nalezněte rozptyl Poissonova rozdělení.

Řešení:

1. Normalizace
$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{e}^{\lambda} = 1\,. \tag{9.1.2}$$
2. Střední hodnota
$$\langle n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda} = \lambda\,. \tag{9.1.3}$$
3. Střední hodnota kvadrátu je
$$\begin{aligned}\left\langle n^2\right\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \underbrace{n}_{n-1+1} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\left[\lambda^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\right] \\ &= \lambda^2 + \lambda\,, \end{aligned} \tag{9.1.4}$$
takže rozptyl vychází
$$(\Delta n)^2 = \left\langle n^2\right\rangle - \langle n\rangle^2 = \lambda\,. \tag{9.1.5}$$
Poissonovo rozdělení má tedy rozpyl i střední hodnotu stejnou a danou velikostí parametru λ.

9.2 Základní vlastnosti koherentních stavů

1. Ukažte, že skalární součin dvou koherentních stavů (9.0.1) je
$$\langle z|z'\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|z-z'|^2}{2}+\mathrm{i}|z||z'|\sin(\phi'-\phi)}\,, \tag{9.2.1}$$
kde
$$z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\,, \qquad \phi \in [0, 2\pi)\,. \tag{9.2.2}$$
Koherentní stavy jsou tedy normalizované, avšak nejsou navzájem ortogonální, z čehož vyplývá, že $|z\rangle$ nelze vzít za bázi Hilbertova prostoru harmonického oscilátoru (resp. někdy se říká, že báze pomocí koherentních stavů je přeurčená).

2. Ukažte, čemu se rovná pravděpodobnost nalezení stavu $|z'\rangle$, pokud máme systém připravený ve stavu $|z\rangle$.

3. Ukažte, že je splněna relace uzavřenosti ve tvaru
$$\int |z\rangle\,\langle z|\,\frac{\mathrm{d}z}{\pi} = 1\,. \tag{9.2.3}$$

4. Ukažte, že rozdělení energií v koherentním stavu je Poissonovo, tj. že lze psát
$$P_n = |\langle n|z\rangle|^2 = \frac{\lambda^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,. \tag{9.2.4}$$
Nalezněte λ.

5. Na základě vlastností Poissonova rozdělení nalezněte, čemu se rovná střední hodnota energie harmonického oscilátoru v koherentním stavu $\langle E\rangle_z$.

Řešení:

1. Na základě definice (9.0.1) platí:
$$\begin{aligned}\langle z|z'\rangle &= \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2+|z'|^2}{2}} \sum_{n,n'=0}^{\infty} \frac{(z^*)^n (z')^{n'}}{\sqrt{n!n'!}} \underbrace{\langle n|n'\rangle}_{\delta_{nn'}} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2+|z'|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^* z')^n}{n!}\,.\end{aligned} \tag{9.2.5}$$
Po zavedení
$$z^* = |z|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\,, \qquad z' = |z'|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi'} \tag{9.2.6}$$
lze absolutní hodnotu rozdílu dvou komplexních čísel rozepsat jako
$$\begin{aligned}|z-z'|^2 &= (z-z')\,(z^*-z'^*) \\ &= |z|^2 + |z'|^2 - zz'^* - z^*z' \\ &= |z|^2 + |z'|^2 - |z|\,|z'|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\phi')} - |z|\,|z'|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\phi-\phi')} \\ &= |z|^2 + |z'|^2 - 2\,|z|\,|z'|\cos(\phi-\phi')\,.\end{aligned} \tag{9.2.7}$$
Pak
$$\begin{aligned}\langle z|z'\rangle &= \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2+|z'|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n\,|z'|^n}{n!}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\phi'-\phi)} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2+|z'|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[|z|\,|z'|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi'-\phi)}\right]^n}{n!} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2+|z'|^2}{2}}\,\mathrm{e}^{|z||z'|[\cos(\phi'-\phi)+\mathrm{i}\sin(\phi'-\phi)]} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{|z'-z|^2}{2}+\mathrm{i}|z||z'|\sin(\phi'-\phi)}\,.\end{aligned} \tag{9.2.8}$$
Je tedy $\langle z|z\rangle = 1$, avšak $\langle z|z'\rangle \neq 0$ je obecně nenulové komplexní číslo.

2. Hledaná pravděpodobnost je dána kvadrátem amplitudy (9.2.1)

$$p = |\langle z'|z\rangle|^2 = \mathrm{e}^{-|z'-z|} \ . \tag{9.2.9}$$

3. Komplexní číslo z se opět vyjádří pomocí velikosti a fáze (9.2.2), kde pro zjednodušení zápisu označíme $r \equiv |z|$. Pak $\mathrm{d}z = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$ a integrál relací uzavřenosti dá

$$\begin{aligned}
\int |z\rangle\langle z| \frac{\mathrm{d}z}{\pi} &= \int \mathrm{e}^{-r^2} \sum_{n,n'=0}^{\infty} \frac{r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}}{\sqrt{n!}} \frac{r^{n'}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n'\phi}}{\sqrt{n'!}} |n\rangle\langle n'| \frac{r}{\pi}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi \\
&= \sum_{n,n'=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n'|}{\pi\sqrt{n!n'!}} \underbrace{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2} r^{n+n'+1}\mathrm{d}r}_{\rho\equiv r^2,\quad \mathrm{d}\rho=2r\mathrm{d}r} \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-n')\phi}\,\mathrm{d}\phi}_{2\pi\,\delta_{nn'}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\,|n\rangle\langle n|}{n!} \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^\infty \rho^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{d}\rho}_{\Gamma(n+1)=n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1 \ .
\end{aligned} \tag{9.2.10}$$

4. Pravděpodobnost se získá dosazením do definičního vztahu (9.2.1)

$$P_n = |\langle n|z\rangle|^2 = \left|\mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}\right|^2 = \mathrm{e}^{-|z|^2} \frac{|z|^{2n}}{n!}$$

a srovnáním s Poissonovým rozdělením (9.1.1)

$$\lambda = |z|^2 \ . \tag{9.2.11}$$

5. Energie vlastního stavu harmonického oscilátor $|n\rangle$ je dána vztahem (4.2.14). Po dosazení

$$\langle E\rangle_z = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar\Omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \hbar\Omega\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) = \hbar\Omega\left(|z|^2+\frac{1}{2}\right) \ . \tag{9.2.12}$$

9.3 Vlastní stav operátoru â

1. Ukažte, že pro posunovací operátor â platí

$$\boxed{\hat{a}\,|z\rangle = z\,|z\rangle} \ . \tag{9.3.1}$$

To znamená, že koherentní stav $|z\rangle$ je vlastním stavem â s vlastní hodnotou z. Operátor â není hermitovský, proto jsou jeho vlastní hodnoty komplexní.

2. Ukažte, že neexistuje žádný vlastní stav posunovacího operátoru $\hat{a}^\dagger$.

3. Pomocí Bakerovy-Campbellovy-Hausdorffovy formule (1.4.16) ukažte, že koherentní stav lze vyjádřit také ve tvaru

$$|z\rangle = \mathrm{e}^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}}\,|0\rangle \ . \tag{9.3.2}$$

Řešení:

1. Při důkazu se vychází z definice koherentního stavu (9.0.1) a vztahu pro posunovací operátor (4.1.15):

$$\begin{aligned}\hat{a}\,|z\rangle &= e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \underbrace{\hat{a}\,|n\rangle}_{\sqrt{n}|n-1\rangle} \\ &= z\, e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}}\,|n-1\rangle \\ &= z\,|z\rangle\ . \end{aligned} \tag{9.3.3}$$

2. Předpokládejme, že existuje vlastní stav operátoru $\hat{a}^\dagger$ s vlastní hodnotou λ

$$\hat{a}^\dagger\,|\psi(z)\rangle = z\,|\psi(z)\rangle\ , \tag{9.3.4}$$

   který lze vyjádřit v bázi $|n\rangle$ jako rozvoj

$$|\psi(z)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle\ . \tag{9.3.5}$$

   Působení $\hat{a}^\dagger$ na tento vztah dá

$$\hat{a}^\dagger\,|\psi(z)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{(n+1)!}\,|n+1\rangle\ , \tag{9.3.6}$$

   takže v rozvoji (9.3.5) musí být $a_0 = 0$. Indukcí vyplývá, že musí platit $a_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Vlastní stav $|\psi(z)\rangle$ tedy neexistuje.

3. Využije se BCH formule ve tvaru (1.4.16),

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}\, e^{\hat{A}}\, e^{\hat{B}}\,, \tag{9.3.7}$$

   která platí za předpokladu

$$\left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = \left[\hat{B}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = 0\,. \tag{9.3.8}$$

   Dosazení $\hat{A} = z\hat{a}^\dagger$, $\hat{B} = -z^*\hat{a}$ (komutační relace (9.3.8) jsou splněny, jelikož $\left[z\hat{a}^\dagger, -z^*\hat{a}\right] = zz^* = |z|^2$ je c-číslo) vede na

$$e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}} = e^{-\frac{|z|^2}{2}}\, e^{z\hat{a}^\dagger}\, e^{z^*\hat{a}}\ . \tag{9.3.9}$$

   Jelikož $\hat{a}\,|0\rangle = 0$, je také

$$e^{-z^*\hat{a}}\,|0\rangle = 0 \tag{9.3.10}$$

   a díky vztahu (4.1.18) a po rozvinutí zbývající exponenciály se dostane

$$\begin{aligned} e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}}\,|0\rangle &= e^{-\frac{|z|}{2}}\, e^{z\hat{a}^\dagger}\,|0\rangle \\ &= e^{-\frac{|z|}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \hat{a}^{\dagger n}\,|0\rangle \\ &= e^{-\frac{|z|}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sqrt{n!}\,|n\rangle \\ &= |z\rangle\ . \end{aligned} \tag{9.3.11}$$

9.4 Střední hodnoty operátorů

1. Nalezněte střední hodnotu energie harmonického oscilátoru ve stavu $|z\rangle$ a porovnejte s výsledkem (9.2.12).

2. Určete střední hodnoty operátorů polohy a hybnosti

$$\langle \hat{\mathsf{x}} \rangle_z \equiv \langle z|\hat{\mathsf{x}}|z\rangle\,, \tag{9.4.1a}$$
$$\langle \hat{\mathsf{p}} \rangle_z \equiv \langle z|\hat{\mathsf{p}}|z\rangle \tag{9.4.1b}$$

a vyjádřete pomocí nich číslo z.

3. Určete střední kvadratickou odchylku operátorů souřadnice a hybnosti

$$\Delta_z \hat{\mathsf{x}}^2 \equiv \left\langle z \middle| (\hat{\mathsf{x}} - \langle \hat{\mathsf{x}} \rangle_z)^2 \middle| z \right\rangle, \tag{9.4.2a}$$
$$\Delta_z \hat{\mathsf{p}}^2 \equiv \left\langle z \middle| (\hat{\mathsf{p}} - \langle \hat{\mathsf{p}} \rangle_z)^2 \middle| z \right\rangle \tag{9.4.2b}$$

a pomocí nich ukažte, že koherentní stavy minimalizují relace neurčitosti.

Řešení:

1. Hamiltonián harmonického oscilátoru se vyjádří pomocí posunovacích operátorů (4.2.12) a využije se vztahy (9.3.1):

$$\left\langle z \middle| \hat{\mathsf{H}} \middle| z \right\rangle = \left\langle z \middle| \hbar\Omega \left(\hat{\mathsf{a}}^\dagger \hat{\mathsf{a}} + \frac{1}{2} \right) \middle| z \right\rangle = \hbar\Omega \left(|z|^2 + \frac{1}{2} \right). \tag{9.4.3}$$

To se rovná dříve obdrženému výsledku (9.2.12).

2. Přímočarý postup rozvinutím koherentních stavů do řady a využitím vztahu mezi souřadnicí a posunovacími operátory (4.2.17)[22] se dostane

$$\begin{aligned}
\langle z|\hat{\mathsf{x}}|z\rangle &= \mathrm{e}^{-|z|^2} \sum_{n,n'=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} \frac{z^{n'}}{\sqrt{n'!}} \underbrace{\langle n'|\hat{\mathsf{x}}|n\rangle}_{\sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}}\left(\sqrt{n+1}\,\delta_{n',n+1} + \sqrt{n}\,\delta_{n',n-1}\right)} \\
&= \mathrm{e}^{-|z|^2} \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n} z^{n+1}}{\sqrt{n!(n+1)!}} \sqrt{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n} z^{n-1}}{\sqrt{n!(n-1)!}} \sqrt{n} \right] \\
&= \mathrm{e}^{-|z|^2} \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}} \left[z\,\mathrm{e}^{|z|^2} + z^*\,\mathrm{e}^{|z|^2} \right] \\
&= \sqrt{\frac{2\hbar}{M\Omega}}\, \mathrm{Re}\, z
\end{aligned} \tag{9.4.5}$$

a analogicky pro operátor hybnosti

$$\langle z|\hat{\mathsf{p}}|z\rangle = \sqrt{2\hbar M\Omega}\, \mathrm{Im}\, z. \tag{9.4.6}$$

Číslo z lze tedy vyjádřit jako

$$\boxed{z = \sqrt{\frac{M\Omega}{2\hbar}} \left(\langle \hat{\mathsf{x}} \rangle_z + \frac{\mathrm{i}}{M\Omega} \langle \hat{\mathsf{p}} \rangle_z \right)}. \tag{9.4.7}$$

Reálná část čísla z udává střední hodnotu *souřadnice*, imaginární část z střední hodnotu *hybnosti*.

[22] Místo explicitního výpočtu lze využít i jednodušší postup díky vztahu (9.3.1):

$$\langle z|\hat{\mathsf{a}}|z\rangle = z\,, \qquad \left\langle z \middle| \hat{\mathsf{a}}^\dagger \middle| z \right\rangle = (\langle z|\hat{\mathsf{a}}|z\rangle)^* = z^*\,. \tag{9.4.4}$$

3. Kvadrát operátoru souřadnice vyjádřený pomocí posunovacích operátorů (4.2.17) je

$$\begin{aligned}\hat{x}^2 &= \frac{\hbar}{2M\Omega}\left(\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2}\right)\\ &= \frac{\hbar}{2M\Omega}\left(\hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 + \hat{a}^{\dagger 2}\right)\end{aligned} \tag{9.4.8}$$

(využily se navíc komutační relace $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$). Na základě vztahů analogických k (9.4.4) je střední hodnota operátoru $\hat{x}^2$ rovna

$$\left\langle z\middle|\hat{x}^2\middle|z\right\rangle = \frac{\hbar}{2M\Omega}\left(z^2 + 2\left|z\right|^2 + 1 + z^{*2}\right). \tag{9.4.9}$$

Střední kvadratická odchylka tedy vychází

$$\Delta_z\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2M\Omega}\left(z^2 + 2\left|z\right|^2 + 1 + z^{*2} - z^2 - 2\left|z\right|^2 - z^{*2}\right) = \frac{\hbar}{2M\Omega} \tag{9.4.10}$$

a podobně pro operátor hybnosti

$$\Delta_z\hat{p}^2 = \frac{\hbar M\Omega}{2}. \tag{9.4.11}$$

Relace neurčitosti pro koherentní stav tedy znějí

$$\Delta_z\hat{x}^2\Delta_z\hat{p}^2 = \frac{\hbar^2}{4}, \tag{9.4.12}$$

což je minimální hodnota, kterou může neurčitost mezi polohou a hybností nabývat.

9.5 Časový vývoj

1. Nalezněte vyjádření koherentního stavu v čase t, tj. stav

$$\left|z(t)\right\rangle = \hat{U}(t)\left|z\right\rangle, \tag{9.5.1}$$

kde $\hat{U}(t)$ je operátor časového vývoje.

2. Určete střední hodnoty operátorů polohy a hybnosti v čase t

$$\langle\hat{x}(t)\rangle_z \equiv \langle z(t)|\hat{x}|z(t)\rangle, \qquad \langle\hat{p}(t)\rangle_z \equiv \langle z(t)|\hat{p}|z(t)\rangle. \tag{9.5.2}$$

Ukažte, že časový vývoj koherentního stavu lze znázornit jako elipsu v grafu, ve kterém na osy vynášíme $\langle\hat{x}(t)\rangle_z$ proti $\langle\hat{p}(t)\rangle_z$. To je konzistentní s dynamikou klasické částice v potenciálu harmonického oscilátoru.

3. Nalezněte podmínku pro hodnotu z, za které bude elipsa v klasickém případě a v kvantovém případě pro střední hodnoty stejná.

Řešení:

1. Evoluční operátor pro harmonický oscilátor zní

$$\hat{U}(t) = \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)}. \tag{9.5.3}$$

Jeho působení na koherentní stav dává

$$\begin{aligned}\left|z(t)\right\rangle &= \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left|n\right\rangle\\ &= \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}-\frac{\mathrm{i}\Omega t}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\right)^n}{\sqrt{n!}}\left|n\right\rangle\\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\Omega t}{2}}\left|z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\right\rangle.\end{aligned} \tag{9.5.4}$$

Při časovém vývoj tedy (až na fázi) číslo z periodicky osciluje s frekvencí Ω,

$$z(t) = z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\ . \tag{9.5.5}$$

Jak víme z předchozího příkladu 9.4, reálná a imaginární část čísla z udávají střední hodnotu polohy a hybnosti (9.4.7). Tyto střední hodnoty se tedy budou měnit v čase, jak se také explicitně ukáže v následující části úlohy.

2. Díky vyjádření komplexního čísla z pomocí rozkladu na velikost a fázi (9.2.2) lze časový vývoj středních hodnot zapsat ve tvaru

$$\langle \hat{\mathsf{x}}(t)\rangle_z = \sqrt{\frac{2\hbar}{M\Omega}}\,\mathrm{Re}\,z(t) = \sqrt{\frac{2\hbar}{M\Omega}}\,|z|\cos\left[\phi_0 - \Omega t\right], \tag{9.5.6a}$$

$$\langle \hat{\mathsf{p}}(t)\rangle_z = \sqrt{2\hbar M\Omega}\,\mathrm{Im}\,z(t) = \sqrt{2\hbar M\Omega}\,|z|\sin\left[\phi_0 - \Omega t\right], \tag{9.5.6b}$$

kde fáze ϕ_0 je fixována střední hodnotou operátorů souřadnice a hybnosti v čase $t = 0$. Vztahy (9.5.6) se pak dají přepsat do tvaru

$$\frac{\langle \hat{\mathsf{x}}(t)\rangle_z^2}{A_q^2} + \frac{\langle \hat{\mathsf{p}}(t)\rangle_z^2}{B_q^2} = 1, \tag{9.5.7}$$

což je rovnice elipsy s poloosami

$$A_q = \sqrt{\frac{2\hbar}{M\Omega}}\,|z|\,, \tag{9.5.8a}$$

$$B_q = \sqrt{2\hbar M\Omega}\,|z|\,. \tag{9.5.8b}$$

3. V klasickém případě je energie harmonického oscilátoru (klasický Hamiltonián)

$$E = \frac{1}{2M}p^2 + \frac{1}{2}M\Omega^2 x^2, \tag{9.5.9}$$

takže

$$\frac{x^2}{A_c^2} + \frac{p^2}{B_c^2} = 1, \tag{9.5.10}$$

kde

$$A_c = \sqrt{\frac{2E}{M\Omega^2}}, \tag{9.5.11a}$$

$$B_c = \sqrt{2ME}. \tag{9.5.11b}$$

Střední hodnota energie v kvantovém případě popsaném koherentním stavem $|z\rangle$ je (9.2.12). Pro velké hodnoty z lze zanedbat faktor $\frac{1}{2}$ a přibližně tedy platí

$$\langle E\rangle_z \approx \hbar\Omega\,|z|^2\ . \tag{9.5.12}$$

Čím větší je hodnota z, tím lépe bude koherentní stav odpovídat pohybu klasické částice o stejné energii.