

3 Koherentní stavy v Kerrově oscilátoru

Nelineární Kerrův oscilátor je popsán Hamiltoniánem

$$\hat{H} = \hbar\Omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar K}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2,$$

kde Ω, K jsou reálné kladné parametry a operátory $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ jsou posunovací operátory harmonického oscilátoru splňující komutační relaci $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. V čase $t = 0$ je oscilátor připraven v koherentním stavu $|z\rangle$.

1. (1/2 bodu) Nalezněte spektrum operátoru $\hat{H}$ a jeho vlastní vektory. Využijte toho, že znáte spektrum lineárního harmonického oscilátoru $\hat{H}_0 = \hbar\Omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2)$, který má vlastní energie $E_n^{(0)} = \hbar\Omega (n + 1/2)$ a vlastní vektory $|n\rangle, n = 0, 1, 2, \dots$.
2. (1/2 bodu) Dokažte, že charakteristická funkce¹ Poissonova rozdělení $P_n = \lambda^n e^{-\lambda}/n!$ je

$$G_P(\theta) = \exp \left[\lambda (e^{i\theta} - 1) \right].$$

3. (1 bod) Nalezněte explicitní vztah ve tvaru funkce (nikoliv řady) pro střední hodnotu $\langle \hat{a}(t) \rangle$. Využijte výsledku z předchozího bodu a skutečnosti, že střední hodnota počtu kvant oscilátoru v koherentním stavu $|z\rangle$ je $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = |z|^2$.
4. (1/2 bodu) Nalezněte střední hodnotu souřadnice a hybnosti v Kerrově oscilátoru v čase $t > 0$.
5. (1 bod) Předpokládejte, že nelinearita Kerrova oscilátoru je malá, tj. $K \ll \Omega$. Rozviňte **vnořenou exponenciálu** vypočítaného výrazu pro $\langle \hat{a}(t) \rangle$ do druhého řádu v parametru K a diskutujte fyzikální význam získaného výsledku.
6. (1/2 bodu) Ve výsledku předchozího bodu byste měli získat Gaussovské potlačení oscilací s časem, $\langle \hat{a}(t) \rangle \propto e^{-at^2}$. Vypočítejte čas rozpadu t_{decay} jako čas, za který amplituda oscilací poklesne na hodnotu $1/e$. Diskutujte platnost tohoto výsledku.
7. (1/2 bodu) Určete čas znovuoživení t_{revival} jako čas, za který se amplituda $\langle \hat{a}(t) \rangle$ vrátí na svou počáteční velikost. Diskutujte vztah časů t_{decay} a t_{revival} v závislosti na parametrech modelu.
8. (1/2 bodu) Vykreslete grafy $|\langle \hat{a}(t) \rangle|$ a $\langle \hat{x}(t) \rangle$ pro vhodně zvolené parametry.

Poznámka: Kerrův oscilátor je důležitý model v kvantové optice, který popisuje chování světla v nelineárních optických prostředích. Efektivně také modeluje anharmonicitu transmon qubitů (založených na Josephsonově přechodu) v supravodivých obvodech používaných v kvantových počítačích.

¹Charakteristická funkce náhodné veličiny s rozdělením pravděpodobnosti P_n je definovaná jako

$$G_P(\theta) \equiv \langle e^{i\theta n} \rangle_P = \sum_n P_n e^{i\theta n}.$$

Je to vlastně Fourierova transformace hustoty pravděpodobnosti a plně určuje rozdělení pravděpodobnosti a všechny momenty dané náhodné veličiny:

$$\langle n^k \rangle_P = \frac{1}{i^k} \frac{d^k G_P(\theta)}{d\theta^k} \Big|_{\theta=0}.$$