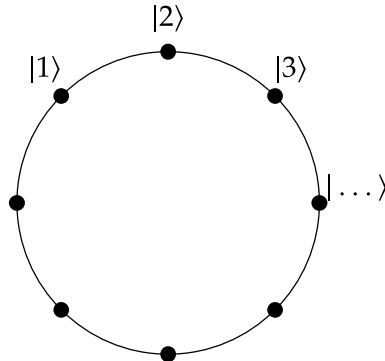


4 Částice na kruhovém řetízku

Uvažujte uzavřený řetízek s $L > 2$ místy, na kterých se může nacházet částice (viz obrázek). Stav takové částice můžeme popsat lineární kombinací báze stavů $|j\rangle_{j=1}^L$, kde stav $|j\rangle$ popisuje částici sedící na j -tém místě řetízku.



Dále uvažujte, že částice na řetízku může skočit vždy na sousední místo. Takové chování lze modelovat pomocí následujícího hamiltoniánu

$$\hat{H} = e \sum_{j=1}^L |j\rangle\langle j| + v \sum_{j=1}^L (|j\rangle\langle j+1| + |j+1\rangle\langle j|),$$

kde první člen je potenciál (e odpovídá energii, kterou má částice za to, že sedí na j -tém místě) a druhý člen — *hopping* — je kinetický (v^{-1} škáluje kinetickou energii podobně jako hmotnost částice). Uzavřenost řetízku odpovídá periodické okrajové podmínce $|j+L\rangle = |j\rangle$.

1. (1 bod) Najděte normalizované vlastní stavy a energie hamiltoniánu $\hat{H}$. Celý proces výpočtu důkladně okomentujte. Řešení byste měli nalézt ve formě rovinných vln

$$|k_a\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{j=1}^L e^{\frac{2\pi i}{L} k_a j} |j\rangle.$$

Jaká je fyzikální interpretace parametru k_a a jakých hodnot může nabývat?

Nápověda: Jeden z možných způsobů je řešení pomocí diferenční rovnice. Přepište hamiltonián na matici v bázi stavů $\{|j\rangle\}_{j=1}^L$ a řešte vlastní rovnici $\hat{H}|h\rangle = E_h|h\rangle$ pro vlastní stavy $|h\rangle$ a energie E_h jako diferenční rovnici s anizatzem pro elementy vlastního vektoru $h_j \equiv h^j$. Využijte periodické okrajové podmínky $h_{j+L} = h_j$.

2. (1 bod) Určete základní stav v bázi $|j\rangle$ stavů a základní energii v závislosti na hodnotách a znaménku parametrů $e, v \in \mathbb{R}$ a délce řetízku L .

Dále se omezte na $v < 0$.

Zatím jsme uvažovali jen jednu částici na řetízku. Můžeme ale přidat další. Hamiltonián systému N nerozlišitelných částic (N neinteragujících částic běžajících po řetízku), kde každá je popsána hamiltoniánem $\hat{H} \equiv \hat{H}^{(j)}$, lze zapsat jako

$$\hat{H}_N = \hat{H}^{(1)} \otimes \hat{1}^{(2)} \otimes \dots \otimes \hat{1}^{(N)} + \hat{1}^{(1)} \otimes \hat{H}^{(2)} \otimes \dots \otimes \mathbb{I}_{(N)} + \dots$$

3. (1 bod) Určete energie základních stavů 2, 3, 4 a 5-ti částicových systémů pro případ, kdy jsou částice na řetízku fermiony se spinem $1/2$, a pro případ, kdy se jedná o bosony se spinem 1 . Jak se budou energie lišit pro fermiony se spinem $3/2$?

V následujícím uvažujte na řetízku jen *dva nerozlišitelné fermiony* se spinem $1/2$. Model rozšíříme o interakční člen mezi částicemi (potenciální energii)

$$\hat{H}_I = \lambda \sum_{j=1}^L |j\rangle\langle j|^{(1)} \otimes |j\rangle\langle j|^{(2)},$$

který modeluje srážky částic na řetízku. Parametr λ odpovídá energii, kterou částice získají, když se budou obě nacházet na stejném místě $|j\rangle$. Podle znaménka parametru lze rozlišit, jestli bude interakce „přitažlivá“, nebo „odpudivá“. Celkový dvoučásticový hamiltonián je

$$\hat{H}_2 = \hat{H}^{(1)} \otimes \hat{1}^{(2)} + \hat{1}^{(1)} \otimes \hat{H}^{(2)} + \hat{H}_I.$$

4. (2 body) Pomocí poruchové teorie určete do prvního řádu v λ základní stav a energii dvoučásticového hamiltoniánu $\hat{H}_2$ jako opravu základního stavu hamiltoniánu neinteragujících částic $\hat{H}^{(1)} \otimes \hat{1}^{(2)} + \hat{1}^{(1)} \otimes \hat{H}^{(2)}$. Jaký je celkový spin základního stavu neinteragujících částic a jak se změní přidáním interakčního členu?

Nápověda: Rozmyslete si, jak vypadá báze prostoru pro dvě nerozlišitelné částice. Můžete využít buď Slaterovy determinanty, nebo adaptovat bázi na singletní a tripletní spinové stavy.

Výsledek interpretujte pomocí jednočásticových stavů $|k_a\rangle$ a porovnejte se základním stavem neinteragujících částic. Můžete k tomu využít například grupovou rychlost, kterou lze pro jednočásticové stavy spočítat jako derivaci jednočásticové energie

$$v_g(k_a) = \frac{dE(k_a)}{dk_a}.$$