Domácí úkol na 30.3.2021

Úkol 4.2: *Rozšiřte kód naprogramovaný v úkolu 3.2 tak, aby fungoval pro libovolně velkou soustavu obyčejných diferenciálních rovnic. Využijte k tomu funkce pro práci s řadami z knihovny* **`numpy`** *popsané v sekci 2.2.4. Vyřešte diferenciální rovnici harmonického oscilátoru*

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -x \tag{29}$$

s počátečními podmínkami $x_0 = 0$, $x'_0 \equiv v_0 = 1$, $t_0 = 0$ *a porovnejte řešení různými metodami s analytickým řešením* $x(t) = \sin t$. *Jako časový krok volte například* $\Delta t = 0.1$ *a* $\Delta t = 0.01$ *a počítejte na časovém intervalu* $t \in \langle 0; 30\rangle$.

Úkol 4.3: *Naprogramujte Verletův algoritmus* (28). *Ukažte, že zatímco při použití Eulerovy metody nebo Runge-Kuttovy metody energie systému v průběhu výpočtu roste, Verletův algoritmus energii zachovává. Energie bezrozměrného harmonického oscilátoru* (29) *je dána vzorcem*

$$E = \frac{1}{2}\left(x^2 + v^2\right). \tag{30}$$

Úkol 4.4: *Eulerovu metodu 1. řádu lze pro soustavy dvou diferenciálních rovnic 1. řádu vylepšit následující záměnou:*

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + v_i \Delta t \\ v_{i+1} &= v_i - x_i \Delta t \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + v_i \Delta t \\ v_{i+1} &= v_i - x_{i+1} \Delta t \end{aligned} \tag{31}$$

(vypočítáme x_{i+1} *a tuto hodnotu použijeme namísto hodnoty* x_i *pro výpočet rychlosti* v_{i+1}*). Naprogramujte tuto metodu a pomocí výsledků úlohy 3.3 ukažte, že pro harmonický oscilátor se jedná o metodu 2. řádu.*

Úkol 4.5: *Pohrajte si s řešením rovnice pro klesající exponenciálu*

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = x \tag{32}$$

s počátečními podmínkami $x_0 = 1$, $x'_0 = -1$. *Přesvědčte se, že Verletova metoda a vylepšená Eulerova metoda z předchozího úkolu jsou nestabilní — pro tuto rovnici v relativně krátkém čase začnou řešení exponenciálně divergovat.*

Úkol 4.6: *Vyřešte nelineární soustavu tří diferenciálních rovnic pro jednoduchý Lorenzův model vedení tepla v atmosféře*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \sigma(y - x), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= x(\rho - z) - y, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= xy - \beta z \end{aligned} \tag{33}$$

s hodnotami parametrů $\sigma = 10$, $\rho = 28$ *a* $\beta = 8/3$, *počátečními podmínkami* $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ *(na počátečních podmínkách zase tolik nezáleží), s krokem* $\Delta t = 0.01$ *a na časovém intervalu* $t \in \langle 0, 100\rangle$. *Vykreslete graf* $z(x)$. *Výsledná křivka je slavný Lorenzův podivný atraktor ve tvaru motýlích křídel, krerý zpopularizoval teorii klasického chaosu.*